



2024 | Απρίλιος | Φάση 3 | Διαγωνίσματα Επανάληψης

ΑΛΓΕΒΡΑ (ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 1)

Β' Γενικού Λυκείου

Γενικής Παιδείας

Σάββατο 27 Απριλίου 2024 | Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1. Απόδειξη σελ.135 Σχολικό βιβλίο
- A2. Ορισμός σελ.36 Σχολικό βιβλίο
- A3. Ορισμός σελ.33 Σχολικό βιβλίο
- A4. i. Σ
ii. Λ
iii. Σ
iv. Σ
v. Σ

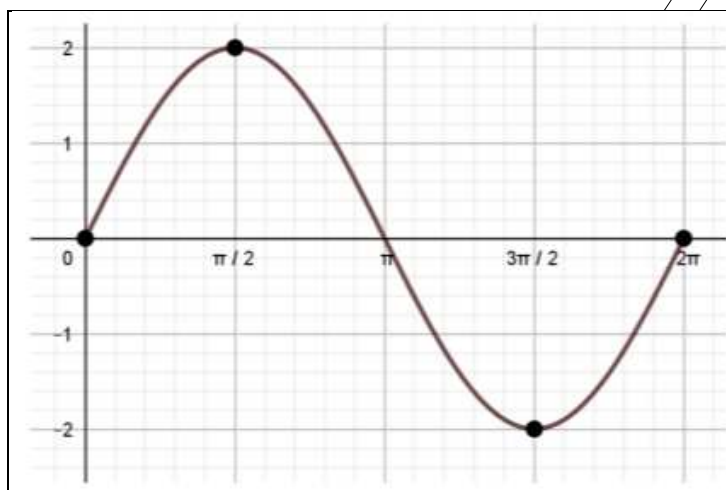
ΘΕΜΑ Β

- B1. Είναι $f(x) = \eta\mu(180^\circ - x) + \sigma\upsilon\nu(90^\circ - x) = \eta\mu x + \eta\mu x = 2\eta\mu x$
- B2. i) Η f είναι της μορφής
 $f(x) = \rho\eta\mu(\omega x)$ με $\rho = 2$ και $\omega = 1$
άρα έχει περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi$, μέγιστη τιμή το $\rho = 2$ και ελάχιστη τιμή το $-\rho = -2$.



2024 | Απρίλιος | Φάση 3 | Διαγωνίσματα Επανάληψης

ii)



ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$$\begin{array}{r} x^4 + x^3 + + ax - 4 \\ -x^4 + 3x^3 - 2x^2 \\ \hline 4x^3 - 2x^2 + ax - 4 \\ -4x^3 + 12x^2 - 8x \\ \hline 10x^2 + (a-8)x - 4 \\ -10x^2 + 30x - 20 \\ \hline (a+22)x - 24 \end{array} \quad \begin{array}{l} x^2 - 3x + 2 \\ x^2 + 4x + 10 \end{array}$$

Η ταυτότητα της διαίρεσης είναι:

$$P(x) = \delta(x)(x^2 + 4x + 10) + (a + 22)x - 24$$

Επομένως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ πρέπει να ισχύει

$$(a + 22)x - 24 = 24x - 24 \Leftrightarrow a + 22 = 24 \Leftrightarrow a = 2$$



2024 | Απρίλιος | Φάση 3 | Διαγωνίσματα Επανάληψης

Γ2. Για $\alpha = 2$ $P(x) = x^4 + x^3 + 2x - 4$.

i. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x - 1$ είναι το $P(1) = 1^4 + 1^3 + 2 \cdot 1 - 4 = 0$

ii. $P(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 + x^3 + 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^3 + 2x^2 + 2x + 4) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x^3 + 2x^2 + 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2(x + 2) + 2(x + 2) = 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow x = -2$ ή $x^2 + 2 = 0$ αδύνατη.

Επομένως τα σημεία τομής του άξονα $x'x$ με τη γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ είναι τα $(-2, 0)$ και $(1, 0)$.

iii.

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$x - 1$	-	-	0	+
$x + 2$	-	0	+	+
$x^2 + 2$	+	+	+	+
$P(x)$	+	0	0	+

$$P(x) < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 1$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η f είναι άρτια.

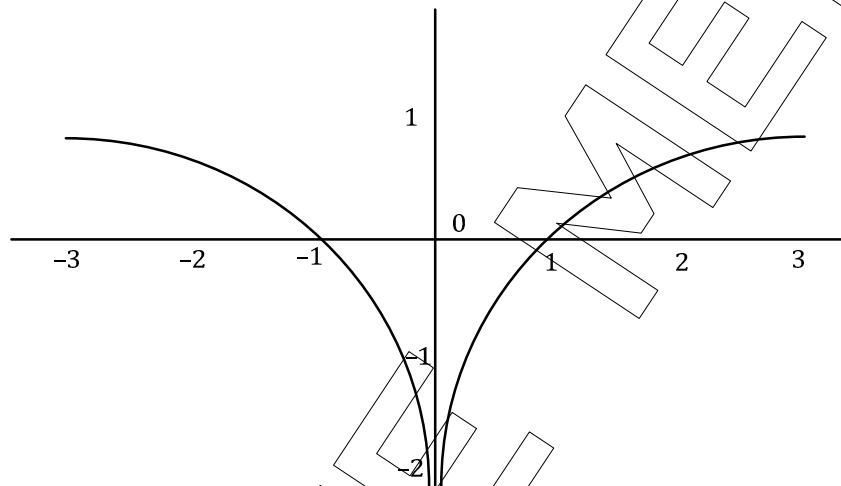
Επειδή $A_f = \mathbb{R}^*$ παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in A_f$ και $-x \in A_f$.

Είναι $f(-x) = \frac{1}{2} \ln(-x)^2 = \frac{1}{2} \ln x^2 = f(x)$, άρα η f είναι άρτια.

Δ2. Για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) = \frac{1}{2} \ln x^2 = \frac{1}{2} 2 \ln x = \ln x$.



- Δ3. Η γραφική παράσταση της f φαίνεται στο παρακάτω σχήμα και, σύμφωνα με τα προηγούμενα ερωτήματα, προκύπτει αν σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \ln x, x > 0$ και στη συνέχεια θεωρήσουμε το συμμετρικό του σχήματος ως προς τον άξονα $y'y$.



- Δ4. Η γραφική της παράσταση είναι κάτω από την ευθεία $y = 2$, όταν $f(x) < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}2\ln|x| < 2 \Leftrightarrow |x| < e^2 \Leftrightarrow -e^2 < x < e^2$. Όμως $x \neq 0$, οπότε η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y = \ln 2$ για $x \in (-e^2, 0) \cup (0, e^2)$.



2024 | Απρίλιος | Φάση 3 | Διαγωνίσματα Επανάληψης

ΑΛΓΕΒΡΑ (ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 2)

Β' Γενικού Λυκείου

Γενικής Παιδείας

Σάββατο 27 Απριλίου 2024 | Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 175.
- A2. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 32.
- A3. Αν υπήρχε τέτοιο τόξο x , θα είχαμε: $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 2$, που είναι άτοπο.
- A4.
1. Σωστό.
 2. Λάθος.
 3. Λάθος.
 4. Λάθος.
 5. Σωστό.

ΘΕΜΑ Β

- B1. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g είναι ευθείες. Και, από υπόθεση, οι ευθείες αυτές έχουν άπειρα κοινά σημεία, επομένως ταυτίζονται. Άρα, θα ισχύουν:



2024 | Απρίλιος | Φάση 3 | Διαγωνίσματα Επανάληψης

$$\left\{ \begin{array}{l} p(y) = (2-y) \cdot (y-1)^2 \Leftrightarrow \text{πραξούλες} \dots \Leftrightarrow p(y) = -y^3 + 4y^2 - 5y + 2 \\ \text{και} \\ e^{\ln 2024} = \ln e^{2024} \text{ (το οποίο ισχύει)} \end{array} \right.$$

Και αποδείχθηκε το ζητούμενο.

B2. Κάνουμε πίνακα ριζών και προσήμων, για το $p(y) = (2-y) \cdot (y-1)^2$.

y	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$2-y$	+	+	0	-
$(y-1)^2$	+	0	+	+
$p(y)$	+	0	0	-

Άρα η γραφική παράσταση του πολυωνύμου $p(y)$:

Βρίσκεται πάνω από τον x όταν $x \in (-\infty, 1) \cup (1, 2)$.

Βρίσκεται κάτω από τον x όταν $x \in (2, +\infty)$.

Τέμνει τον x στα σημεία $(1, 0)$ και $(2, 0)$.

B3. Από υπόθεση έχουμε $p(\eta\mu\omega) = 0$ δηλαδή

$$(2 - \eta\mu\omega) \cdot (\eta\mu\omega - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \eta\mu\omega = 2 \text{ (αδύνατη)} \\ \text{ή} \\ \eta\mu\omega = 1 \Leftrightarrow \omega = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

Επίσης από υπόθεση, έχουμε $23\pi < \omega < 24\pi$, άρα

$$\begin{aligned} 23\pi < 2k\pi + \frac{\pi}{2} < 24\pi &\Leftrightarrow 23\pi - \frac{\pi}{2} < 2k\pi < 24\pi - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{45\pi}{2} < 2k\pi < \frac{47\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{45}{4} < k < \frac{47}{4} \Leftrightarrow 11,25 < k < 11,75 \end{aligned}$$

το οποίο είναι αδύνατο, γιατί δεν υπάρχει ακέραιος αριθμός ανάμεσα στο 11,25 και στο 11,75.

Επομένως, η εξίσωση είναι αδύνατη και δεν υπάρχει τόξο ω , τέτοιο ώστε το $\eta\mu\omega$ να είναι ρίζα του πολυωνύμου $p(y)$.



B4.

Η εξίσωση $p(e^y)=0$ γράφεται: $(2-e^y) \cdot (e^y-1)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} e^y=2 \Leftrightarrow y=\ln 2 \\ \text{ή} \\ e^y=1 \Leftrightarrow y=0 \end{cases}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αφού f περιττή στο $\mathbb{R}$, γνωρίζουμε ότι $f(-x)=-f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Θέτοντας $x=0$ έχουμε: $f(0)=-f(0) \Leftrightarrow 2f(0)=0 \Leftrightarrow f(0)=0$ και αποδείχθηκε το ζητούμενο.

Γ2. Από υπόθεση έχουμε ότι $f(-x)=-f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(1)=2$, άρα και $f(0)=0$ και $f(-1)=-2$.

1. Από την ταυτότητα της διαίρεσης $f(x):(x^3-x)$ έχουμε:

$f(x)=(x^3-x) \cdot \pi(x) + \nu(x)$. Αφού ο διαιρέτης είναι 3ου βαθμού, το υπόλοιπο της διαίρεσης θα είναι (το πολύ) δευτεροβάθμιο. Έστω, λοιπόν, ότι $\nu(x)=ax^2+\beta x+\gamma$, με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Άρα η πιο πάνω ταυτότητα της διαίρεσης γράφεται $f(x)=(x^3-x) \cdot \pi(x) + ax^2 + \beta x + \gamma$. Αντικαθιστώντας $x=0$, $x=1$, $x=-1$ αντίστοιχα και αξιοποιώντας τα δεδομένα του Γ2 έχουμε:

$$\begin{cases} f(0)=\gamma=0 \\ f(1)=2=\alpha+\beta+\gamma \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow (\alpha, \beta, \gamma)=(0, 2, 0) \\ f(-1)=-2=\alpha-\beta+\gamma \end{cases}$$

Άρα $\nu(x)=2x$, οπότε $f(x)=(x^3-x) \cdot \pi(x) + 2x$.

2. Από υπόθεση, η f είναι πολυώνυμο 3ου βαθμού και ισχύει $f(2)=10$.

a. Άρα, το πηλίκο της διαίρεσης (μεταξύ δύο τριτοβάθμιων πολυωνύμων) είναι ένα πολυώνυμο μηδενικού βαθμού, δηλαδή ένα σταθερό πολυώνυμο, έστω $\pi(x)=\kappa, \kappa \in \mathbb{R}$. Επομένως, η ταυτότητα της διαίρεσης γίνεται $f(x)=(x^3-x) \cdot \kappa + 2x$ και για $x=2$ έχουμε



2024 | Απρίλιος | Φάση 3 | Διαγωνίσματα Επανάληψης

$10 = (2^3 - 2) \cdot \kappa + 4 \Leftrightarrow 10 = 6\kappa + 4 \Leftrightarrow \kappa = 1$. Άρα, $\pi(x) = 1$ και αποδείχθηκε το ζητούμενο.

- b. Με βάση τα πιο πάνω, τελικά, είναι $f(x) = (x^3 - x) \cdot 1 + 2x \Leftrightarrow f(x) = x^3 + x$. Η ανίσωση $f(\ln x) < 2$ γράφεται $\ln^3 x + \ln x < 2 \Leftrightarrow \ln^3 x + \ln x - 2 < 0$, για $x > 0$. Θέτουμε $\ln x = \omega$, οπότε έχουμε $\omega^3 + \omega - 2 < 0 \Leftrightarrow (\omega - 1) \cdot (\omega^2 + \omega + 2) < 0 \Leftrightarrow \omega < 1$. Άρα πρέπει $\ln x < 1 \Leftrightarrow x < e$ και τελικά $0 < x < e$ (ή $x \in (0, e)$).

ΘΕΜΑ Δ

- Δ1. Από υπόθεση, ισχύει $p(\alpha) = 0$ δηλαδή $\alpha^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$ και αποδείχθηκε το ζητούμενο.

- Δ2. Για το πεδίο ορισμού της f : $\left\{ \begin{array}{l} e^x - 1 \geq 0 \\ \sqrt{e^x - 1} > 0 \end{array} \right\}$ και $\Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$.

Άρα $A_f = (0, +\infty)$.

Για το πεδίο ορισμού της g :

$$\left\{ \begin{array}{l} e^x - 1 > 0 \\ \ln(e^x - 1) \geq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} e^x > 1 \\ e^x - 1 \geq 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x > 0 \\ e^x \geq 2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x > 0 \\ x \geq \ln 2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x \geq \ln 2$$

(αφού $2 > 1 \xrightarrow{\ln x \uparrow} \ln 2 > \ln 1 \Leftrightarrow \ln 2 > 0$).

Άρα $A_g = [\ln 2, +\infty)$.



Δ3. Θεωρούμε την εξίσωση $f(x)=g(x)$ και, διαδοχικά, έχουμε:

$$\begin{aligned}\ln(\sqrt{e^x-1}) &= \sqrt{\ln(e^x-1)} \Leftrightarrow \ln(e^x-1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\ln(e^x-1)} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \ln(e^x-1) &= \sqrt{\ln(e^x-1)} \Leftrightarrow \ln(e^x-1) = 2 \cdot \sqrt{\ln(e^x-1)} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \ln^2(e^x-1) &= 4 \cdot \ln(e^x-1) \Leftrightarrow \ln^2(e^x-1) - 4 \cdot \ln(e^x-1) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \ln(e^x-1) \cdot [\ln(e^x-1) - 4] &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(e^x-1) = 0 \\ \ln(e^x-1) - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} e^x - 1 = 1 \\ \ln(e^x-1) = 4 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} e^x = 2 \\ e^x - 1 = e^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln 2 \\ x = \ln(e^4 + 1) \end{cases}\end{aligned}$$

Τώρα έχουμε: $f(\ln 2) = \ln(\sqrt{e^{\ln 2} - 1}) = \ln(\sqrt{2-1}) = \ln 1 = 0$, αλλά και

$$g(\ln 2) = \sqrt{\ln(e^{\ln 2} - 1)} = \sqrt{\ln(2-1)} = \sqrt{\ln 1} = \sqrt{0} = 0.$$

Και $f(\ln(e^4 + 1)) = \ln(\sqrt{e^{\ln(e^4 + 1)} - 1}) = \ln(\sqrt{e^4 + 1 - 1}) = \ln e^2 = 2$ αλλά και

$$\begin{aligned}g(\ln(e^4 + 1)) &= \sqrt{\ln(e^{\ln(e^4 + 1)} - 1)} = \sqrt{\ln(e^4 + 1 - 1)} = \\ &= \sqrt{\ln e^4} = \sqrt{4} = 2.\end{aligned}$$

Άρα, οι γραφικές παραστάσεις των f, g τέμνονται στα σημεία $A(\ln 2, 0)$ και $B(\ln(e^4 + 1), 2)$. Το σημείο A , προφανώς, βρίσκεται πάνω στον άξονα $x'x$. Άρα, αποδείχθηκε το ζητούμενο.

Δ4. Μελέτη μονοτονίας της f .

Έστω $x_1, x_2 \in A_f$, με $x_1 < x_2$. Έχουμε:

$$\begin{aligned}x_1 < x_2 &\xrightarrow{e^x \uparrow} e^{x_1} < e^{x_2} \Leftrightarrow e^{x_1} - 1 < e^{x_2} - 1 \xrightarrow{\sqrt{x} \uparrow} \sqrt{e^{x_1} - 1} < \sqrt{e^{x_2} - 1} \Leftrightarrow \\ &\xrightarrow{\ln x \uparrow} \ln(\sqrt{e^{x_1} - 1}) < \ln(\sqrt{e^{x_2} - 1}) \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)\end{aligned}$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

Μελέτη μονοτονίας της g .

Έστω $x_1, x_2 \in A_g$, με $x_1 < x_2$. Έχουμε:



$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\stackrel{e^x \uparrow}{\Leftrightarrow} e^{x_1} < e^{x_2} \Leftrightarrow e^{x_1} - 1 < e^{x_2} - 1 \stackrel{\ln x \uparrow}{\Leftrightarrow} \ln(e^{x_1} - 1) < \ln(e^{x_2} - 1) \Leftrightarrow \\ &\stackrel{\sqrt{x} \uparrow}{\Leftrightarrow} \sqrt{\ln(e^{x_1} - 1)} < \sqrt{\ln(e^{x_2} - 1)} \Leftrightarrow g(x_1) < g(x_2) \end{aligned}$$

Άρα και η g είναι γνησίως αύξουσα.

Τώρα έχουμε: $2024, 2025 \in A_f \cap A_g$ και ισχύει:

$$\begin{aligned} &\left\{ \begin{array}{l} 2024 < 2025 \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} f(2024) < f(2025) \\ 2024 < 2025 \stackrel{g \uparrow}{\Leftrightarrow} g(2024) < g(2025) \end{array} \right\} \stackrel{(+)}{\Rightarrow} \\ &\Rightarrow f(2024) + g(2024) < f(2025) + g(2025) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f(2024) - f(2025) < g(2025) - g(2024) \end{aligned}$$

Και αποδείχθηκε το ζητούμενο.