



2024 | Απρίλιος | Φάση 3 | Διαγωνίσματα Επανάληψης

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Α' Γενικού Λυκείου

Πέμπτη 9 Μαΐου 2024 | Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

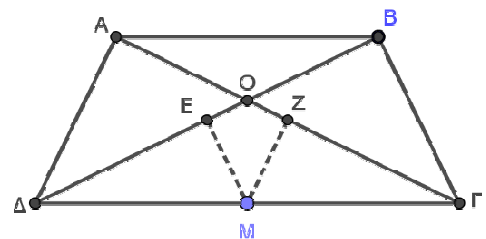
- A1. Σχολικό Βιβλίο σελίδα 89
- A2. Σχολικό Βιβλίο σελίδα 113
- A3. Να χαρακτηρίσετε ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ) τις παρακάτω προτάσεις:
- i. Σ
 - ii. Λ.
 - iii. Σ
 - iv. Λ
 - v. Σ

ΘΕΜΑ Β

- B1. Το ME ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΔΒΓ, οπότε $EM = \frac{BG}{2}$

Το ZM ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΓΑΔ, άρα $MZ \parallel AD$ και $MZ = \frac{AD}{2}$

Επίσης, το ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο οπότε ισχύει ότι $BΓ = AD$. Οπότε προκύπτει ότι $ME = MZ$.





2024 | Απρίλιος | Φάση 3 | Διαγωνίσματα Επανάληψης

B2. Είναι $MZ \parallel AD$ και $AD \perp AG$ άρα είναι και $MZ \perp AG$.

B3. Τα τρίγωνα MDE και MZF έχουν:

- $ME = MZ$, από το ερώτημα (α)
- $MD = MF$, διότι M μέσο του GD
- $\angle E = \frac{\angle B}{2} = \frac{\angle F}{2} = \angle Z$, διότι οι AG, BD είναι διαγώνιες του ισοσκελούς τραπεζίου.

Τα τρίγωνα MDE και MZF έχουν τις τρεις πλευρές τους μία προς μία ίσες άρα είναι ίσα.

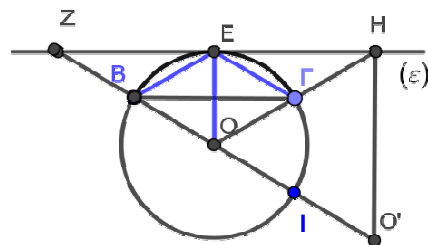
B4. Επειδή τα τρίγωνα MDE και MZF είναι ίσα έχουν και $\angle DGM = \angle FGD$ διότι είναι απέναντι από τις ίσες πλευρές ME, MF αντίστοιχα. Άρα το τρίγωνο ODG είναι ισοσκελές και ισχύει $OD = OG$

B5. Τότε: $OD = OG \Leftrightarrow BD - BO = AG - AO \Leftrightarrow OA = OB$ Άρα το τρίγωνο AOB είναι ισοσκελές.

Η OM είναι διάμεσος στο ισοσκελές $\triangle OAB$ επομένως και ύψος άρα $OM \perp AB$. Επειδή $AG \parallel BD$ τότε $OM \perp AG$, Εφόσον η OM είναι ύψος στο $\triangle OAB$ θα είναι και διάμεσος άρα είναι μεσοκάθετος στο AB .

ΘΕΜΑ Γ

- Γ1. i)** Η ακτίνα OE στο σημείο επαφής E είναι κάθετη στην εφαπτομένη (ε) του κύκλου. Το E είναι μέσο του τόξου $B\Gamma$, οπότε τα τόξα BE και $E\Gamma$ είναι ίσα, άρα και οι αντίστοιχες χορδές τους EB και $E\Gamma$ θα είναι ίσες. Επίσης είναι $OB = OG$ ως ακτίνες του κύκλου. Επομένως η ευθεία που ορίζουν τα σημεία O και E θα είναι μεσοκάθετος του τμήματος $B\Gamma$. Οπότε η OE θα είναι κάθετη στην $B\Gamma$ και επίσης είναι κάθετη στην ευθεία (ε) . Επομένως $B\Gamma \parallel (\varepsilon)$ ως κάθετες ευθείες στην ίδια ευθεία OE .





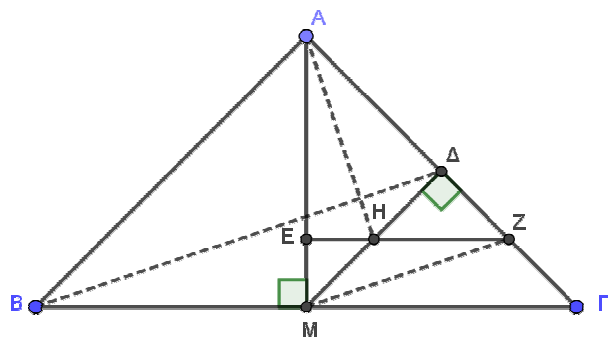
ii) Επειδή είναι $OB = OG$ ως ακτίνες του κύκλου, το τρίγωνο OBG είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά BG , οπότε οι προσκείμενες στη βάση του γωνίες θα είναι ίσες, δηλαδή $\hat{O}BG = \hat{O}GB$ (1). Επίσης είναι $\hat{O}BG = \hat{O}ZH$ (2) και $\hat{O}GB = \hat{O}HZ$ (3) ως εντός εκτός και επι τα αυτά γωνίες των παραλλήλων BG και ϵ με τέμνουσες την OZ και OH αντίστοιχα. Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι $\hat{O}ZH = \hat{O}HZ$ (4), οπότε το τρίγωνο OZH είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά ZH .

- Γ2. i. Η OE είναι κάθετη στην ϵ , οπότε το τρίγωνο OEZ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα OZ και η BE είναι διάμεσος στην υποτείνουσα, άρα $BE = \frac{OZ}{2} = OB = \rho$, όμως $OE = OB = \rho$. Οπότε $OE = OB = \frac{OZ}{2}$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο OEZ η κάθετη πλευρά του OE είναι το μισό της υποτείνουσάς του OZ , άρα η απέναντι της κάθετης πλευράς γωνία θα είναι 30° , δηλαδή $\hat{O}ZH = 30^\circ$. Όμως $\hat{O}ZH = \hat{O}HZ$ (από σχέση (4)), οπότε $\hat{O}HZ = 30^\circ$. Για τις γωνίες του τριγώνου OZH ισχύει ότι $\hat{O}ZH + \hat{O}HZ + \hat{ZOH} = 180^\circ \Leftrightarrow 30^\circ + 30^\circ + \hat{ZOH} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{ZOH} = 120^\circ$
- ii. Η $OH = 2\rho$ και $O'Z = 4\rho$ άρα $OH = \frac{O'Z}{2}$ (1) Η OH είναι διάμεσος του τριγώνου ZHO' αφού O είναι μέσο του $O'Z$ (2)
Από (1) και (2) Το τρίγωνο ZHO' είναι ορθογώνιο με $\hat{H} = 90^\circ$

ΘΕΜΑ Δ

- Δ1. Στο ισοσκελές τρίγωνο ABG το AM είναι ύψος που αντιστοιχεί στη βάση του, οπότε είναι και διάμεσος του τριγώνου. Άρα $AM = \frac{BG}{2}$ (1).

Στο τρίγωνο MAG το H είναι μέσο της MA και $HZ \parallel MG$, άρα το Z είναι μέσο της AG και ισχύει ότι: $HZ = \frac{MG}{2}$ (2)





Από (1), (2) βρίσκουμε: $HZ = \frac{\Gamma M}{2} = \frac{\frac{B\Gamma}{2}}{2} = \frac{B\Gamma}{4}$

Δ2. Στο τρίγωνο ΒΔΓ το ΜΖ ενώνει τα μέσα Μ και Ζ των πλευρών ΒΓ και ΔΓ αντίστοιχα, άρα: ΜΖ // ΒΔ.

Δ3. Είναι ΚΖ // ΒΓ και ΒΓ ⊥ ΑΜ, άρα ΚΖ ⊥ ΑΜ.

Στο τρίγωνο ΑΜΖ τα ΜΔ, ΖΚ είναι ύψη, άρα το σημείο τομής τους Η, είναι ορθόκεντρο του τριγώνου. Επομένως το ΑΗ είναι το τρίτο ύψος του τριγώνου. Δηλαδή ΑΗ ⊥ ΜΖ και επειδή ΜΖ // ΒΔ είναι και ΑΗ ⊥ ΒΔ.