

ΤΑΞΗ: Β' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ/ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Σάββατο 29 Απριλίου 2023
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 135

A2.

α) Λάθος	β) Λάθος	γ) Σωστό	δ) Σωστό	ε) Λάθος
----------	----------	----------	----------	----------

A3.

α) $\ln e = 1$	β) $a^{\log_a \theta} = \theta$	γ) $\log_a 1 = 0$	δ) $\log_a a^x = x$
----------------	---------------------------------	-------------------	---------------------

ΘΕΜΑ Β

B1. Αφού ο αριθμός 2 είναι ρίζα του $P(x)$ θα ισχύει $P(2) = 0$

$$\Delta\eta\lambda\alpha\delta\acute{\eta} P(2) = 0 \Leftrightarrow 16 - 8\alpha - 12 + 2\beta - 4 = 0 \Leftrightarrow 2\beta = 8\alpha \Leftrightarrow \boxed{\beta = 4\alpha} \quad (1)$$

Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x + 1$ είναι -12 άρα

$$P(-1) = -12 \Leftrightarrow 1 + \alpha - 3 - \beta - 4 = -12 \Leftrightarrow \boxed{\alpha - \beta = -6} \quad (2)$$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2) έχουμε

$$\begin{cases} \beta = 4\alpha \\ \alpha - \beta = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 4\alpha \\ \alpha - 4\alpha = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 4\alpha \\ -3\alpha = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 8 \\ \alpha = 2 \end{cases}$$

B2. Το πολυώνυμο για $\alpha = 2$ και $\beta = 8$ γίνεται $P(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4$

Κάνουμε τη διαίρεση του $P(x)$ με το $x - 2$ με τη βοήθεια του σχήματος Horner.

1	-2	-3	8	-4	2
↓	2	0	-6	4	
1	0	-3	2	0	

Άρα $P(x) = (x - 2)(x^3 - 3x + 2)$

Το πολυώνυμο $x^3 - 3x + 2$ έχει ρίζα την $x = 1$ άρα το παραγοντοποιούμε με τη βοήθεια του σχήματος Horner

1	0	-3	2	1
↓	1	1	-2	
1	1	-2	0	

$x^3 - 3x + 2 = (x - 1)(x^2 + x - 2)$

Άρα $P(x) = (x - 2)(x - 1)(x^2 + x - 2)$

Επομένως $P(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x - 1)(x^2 + x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \\ \text{ή} \\ x - 1 = 0 \\ \text{ή} \\ x^2 + x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ \text{ή} \\ x = 1 \\ \text{ή} \\ x = 1 \text{ ή } x = -2 \end{cases}$

Άρα οι ρίζες της εξίσωσης $P(x) = 0$ είναι το 1 (διπλή ρίζα) το 2 και το -2

B3. Η συνάρτηση ορίζεται για εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία

$\frac{P(x)}{x - 1} \geq 0$ και $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow P(x)(x - 1) \geq 0$ και $x \neq 1$

Έχουμε

$P(x)(x - 1) \geq 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x - 1)(x^2 + x - 2)(x - 1) \geq 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x - 1)^2(x^2 + x - 2) \geq 0$

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$	
$x - 2$	-	-	-	○	+	
$(x - 1)^2$	+	+	○	+	+	
$x^2 + x - 2$	+	○	○	+	+	
$(x - 2)(x - 1)^2(x^2 + x - 2)$	-	○	∥	-	○	+

Άρα $x \in [-2, 1) \cup [2, +\infty)$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $\eta\mu(5\pi - x) = \eta\mu(4\pi + \pi - x) = \eta\mu(\pi - x) = \eta\mu x$

$\sigma\upsilon\nu(3\pi + x) = \sigma\upsilon\nu(2\pi + \pi + x) = \sigma\upsilon\nu(\pi + x) = -\sigma\upsilon\nu x$

$\sigma\upsilon\nu(4\pi - x) = \sigma\upsilon\nu(-x) = \sigma\upsilon\nu x$

$\eta\mu\left(x - \frac{5\pi}{2}\right) = -\eta\mu\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) = -\eta\mu\left(2\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) = -\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sigma\upsilon\nu x$

Άρα η παράσταση $A = \eta\mu^2(5\pi - x) + \sigma\upsilon\nu(3\pi + x) \cdot \sigma\upsilon\nu(4\pi - x) + 2\eta\mu^2\left(x - \frac{5\pi}{2}\right)$

με βάση τα παραπάνω γίνεται

$A = \eta\mu^2 x + (-\sigma\upsilon\nu x) \cdot \sigma\upsilon\nu x + 2(-\sigma\upsilon\nu x)^2 = \eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x + 2\sigma\upsilon\nu^2 x = \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$

Γ2. Γνωρίζουμε ότι η περίοδος της συνάρτησης δίνεται από τον τύπο $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Ισχύει $T = \pi$ άρα $\omega = 2$ οπότε $f(x) = 1 + B\sigma\upsilon\nu(2x)$

1^{ος} τρόπος

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $-1 \leq \sigma\upsilon\nu 2x \leq 1$ όπου το 1 και το -1 είναι αντίστοιχα η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή του $\sigma\upsilon\nu 2x$

Οπότε : $-1 \leq \sigma\upsilon\nu 2x \leq 1 \Leftrightarrow -B \geq B\sigma\upsilon\nu 2x \geq B \Leftrightarrow 1 - B \geq 1 + B\sigma\upsilon\nu 2x \geq 1 + B$

Επομένως $1 + B \leq f(x) \leq 1 - B$

Από υπόθεση έχουμε ότι η μέγιστη τιμή της f είναι 5 άρα

$1 - B = 5 \Leftrightarrow B = -4$ άρα $f(x) = 1 - 4\sigma\upsilon\nu(2x)$

Η ελάχιστη τιμή της f είναι το $1 + B$ δηλαδή $1 + B = 1 - 4 = -3$

2^{ος} τρόπος

Η συνάρτηση $y = B\sigma\upsilon\nu(2x), B < 0$ (1) είναι συμμετρική της $y = -B\sigma\upsilon\nu(2x), B < 0$ ως προς τον άξονα $x'x$ οπότε έχουν την ίδια μέγιστη και την ίδια ελάχιστη τιμή στο \mathbb{R} .

Η $y = -B\sigma\upsilon\nu(2x), B < 0$ έχει μέγιστο το $-B$ και ελάχιστο το B

Άρα και η (1) έχει μέγιστο το $-B$ και ελάχιστο το B

Επομένως η $f(x) = 1 + B\sin(2x)$, $B < 0$ έχει μέγιστο το $1 - B$ και ελάχιστο το $1 + B$

Άρα $1 - B = 5 \Leftrightarrow B = -4$

Γ3. Θα λύσουμε την εξίσωση $f(x) = 3$, $x \in [-\pi, \pi]$

$$f(x) = 3 \Leftrightarrow 1 - 4\sin 2x = 3 \Leftrightarrow -4\sin 2x = 2 \Leftrightarrow \sin 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 2x = \sin \frac{2\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2κπ + \frac{2\pi}{3} \\ \text{ή} \\ 2x = 2κπ - \frac{2\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = κπ + \frac{\pi}{3} \\ \text{ή} \\ x = κπ - \frac{\pi}{3} \end{cases}, κ \in \mathbb{Z}$$

$x = κπ + \frac{\pi}{3}$ $-\pi \leq x \leq \pi$ $-\pi \leq κπ + \frac{\pi}{3} \leq \pi$ $-1 \leq κ + \frac{1}{3} \leq 1$ $-\frac{4}{3} \leq κ \leq \frac{2}{3}$ <p>επειδή $κ \in \mathbb{Z}$ έχουμε $κ = -1$ και $κ = 0$</p> <p>άρα $x = -\frac{2\pi}{3}$ και $x = \frac{\pi}{3}$</p>	$x = κπ - \frac{\pi}{3}$ $-\pi \leq x \leq \pi$ $-\pi \leq κπ - \frac{\pi}{3} \leq \pi$ $-1 \leq κ - \frac{1}{3} \leq 1$ $-\frac{2}{3} \leq κ \leq \frac{4}{3}$ <p>επειδή $κ \in \mathbb{Z}$ έχουμε $κ = 0$ και $κ = 1$</p> <p>άρα $x = -\frac{\pi}{3}$ και $x = \frac{2\pi}{3}$</p>
--	---

Άρα τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f και της ευθείας $y = 3$, $x \in [-\pi, \pi]$

είναι τα $A\left(-\frac{2\pi}{3}, 3\right)$, $B\left(-\frac{\pi}{3}, 3\right)$, $\Gamma\left(\frac{\pi}{3}, 3\right)$ και $\Delta\left(\frac{2\pi}{3}, 3\right)$

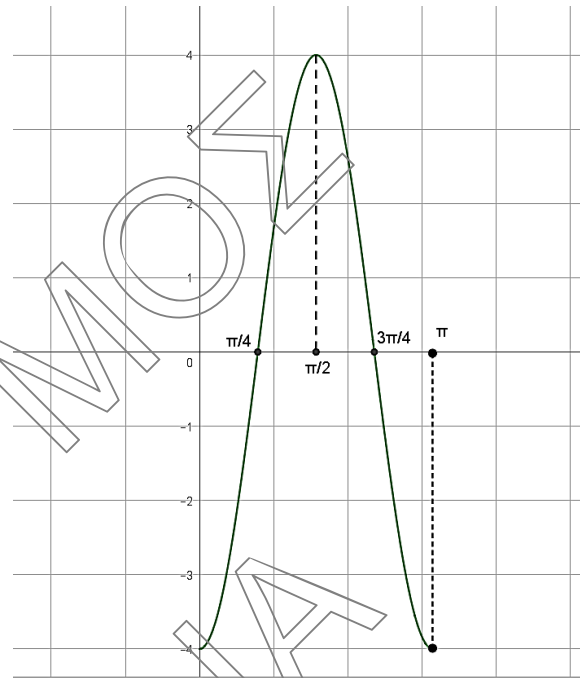
Γ4. α) $g(x) = f(x) - 1 \Leftrightarrow g(x) = -4\sin 2x, x \in [0, \pi]$

Η περίοδος της συνάρτησης είναι $T = \pi$, έχει μέγιστο το 4 και ελάχιστο το -4

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$\sin 2x$	1	0	-1	0	1
$g(x) = -4\sin 2x$	-4	0	4	0	-4

Άρα $g(x) > 0$ όταν $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$

$g(x) < 0$ όταν $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$



β) Να λύσετε την ανίσωση $g(x) \cdot (\pi - 4x) \cdot (x^2 - \pi x) > 0$.

Βρίσκουμε τις ρίζες του κάθε παράγοντα ξεχωριστά

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \text{ ή } x = \frac{3\pi}{4}$$

$$\pi - 4x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

$$x^2 - \pi x = 0 \Leftrightarrow x(x - \pi) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = \pi$$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
g(x)		-	+	-
$\pi - 4x$		+	-	-
$x^2 - \pi x$	-	-	-	-
$g(x) \cdot (\pi - 4x) \cdot (x^2 - \pi x)$	-	+	+	-

Άρα $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. (α) Α΄ τρόπος

Από το γράφημα της f προκύπτει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα

Β΄ τρόπος

Έστω $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ τότε

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1 \quad (1)$$

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \ln x_1 < \ln x_2 \quad (2)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) προκύπτει ότι $f(x_1) < f(x_2)$

Άρα η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$

(β) $f(x) = x \Leftrightarrow \ln x + x - 1 = x \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$ Άρα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \ln x + x - 1$ και $y = x$ τέμνονται στο σημείο $A(e, e)$

$$\Delta 2. \ln 3 > e - 2 \Leftrightarrow \ln 3 + 2 > e \Leftrightarrow f(3) > f(e) \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} 3 > e$$

Β τρόπος: $\ln 3 > 1 > e - 2$

$$\begin{aligned} \Delta 3. \quad f(e^x) &= e^{3x} - e^{2x} + x \Leftrightarrow \ln e^x + e^x - 1 = e^{3x} - e^{2x} + x \Leftrightarrow e^{3x} - e^{2x} - e^x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow e^{2x}(e^x - 1) - (e^x - 1) = 0 \Leftrightarrow (e^x - 1)(e^{2x} - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (e^x - 1)(e^x - 1)(e^x + 1) = 0 \Leftrightarrow (e^x - 1)^2 (e^x + 1) = 0 \stackrel{e^x + 1 \neq 0}{\Leftrightarrow} e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

$$\Delta 4. \text{ Η } \frac{f(x) - e}{f(x) - x + 1} \text{ ορίζεται για } x > 0 \text{ και } f(x) - x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$$

$$\text{Άρα } \frac{f(x) - e}{f(x) - x + 1} < 0 \Leftrightarrow (f(x) - e)(f(x) - x + 1) < 0$$

Βρίσκουμε τις ρίζες και το πρόσημο του κάθε παράγοντα

$$f(x) - e = 0 \Leftrightarrow f(x) = e \Leftrightarrow x = e$$

$$f(x) - e > 0 \Leftrightarrow f(x) > e \Leftrightarrow f(x) > f(e) \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} x > e$$

$$f(x) - x + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x + x - 1 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$f(x) - x + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x + x - 1 - x + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

x	0	1	e	$+\infty$	
$f(x) - e$		-	-	○	+
$f(x) - x + 1$	-	○	+	+	+
$(f(x) - e)(f(x) - x + 1)$	+	≠	-	+	+

Άρα $x \in (1, e)$