



2023 | Απρίλιος | Φάση 3 | Διαγωνίσματα Επανάληψης

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ' Γενικού Λυκείου

Θετικών Σπουδών / Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής

Μ. Δευτέρα 10 Απριλίου 2023 | Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Α

A1. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα Fermat.

Μονάδες 3+7

A2. Να δώσετε τον ορισμό της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f σε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.

Μονάδες 5

A3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν μία συνάρτηση f είναι ορισμένη στο A και για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 = x_2$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$, τότε η συνάρτηση f είναι 1-1.

Μονάδες 2

β) Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση περιττού βαθμού έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

Μονάδες 2

γ) Η εφαπτομένη μιας γραφικής παράστασης συνάρτησης μπορεί να έχει με αυτήν περισσότερα από ένα κοινά σημεία.

Μονάδες 2



2023 | Απρίλιος | Φάση 3 | Διαγωνίσματα Επανάληψης

δ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ και δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, τότε δεν υπάρχει ούτε το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Μονάδες 2

ε) Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής και μη σταθερή στο $[a, b]$ και ισχύει $\int_a^b f(x) dx = 0$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (a, b)$ ώστε $f(x_0) = 0$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε την συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \begin{cases} x + \eta \mu x, & x \leq 0 \\ \sqrt{\alpha x + 1} + \beta, & x > 0 \end{cases}$ με $\alpha > 0$ και $\beta \in \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

B1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 4$ και $\beta = -1$.

Μονάδες 5

B2. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 6

B3. Αν $g(x) = \ln x$, τότε να δείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = (g \circ f)(x)$ έχει τύπο $h(x) = \ln(\sqrt{4x+1} - 1)$ και αφού δείξετε ότι είναι συνάρτηση 1-1 έπειτα να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση h^{-1} .

Μονάδες 9



2023 | Απρίλιος | Φάση 3 | Διαγωνίσματα Επανάληψης

- B4. Αν ένα σημείο $M(x(t), y(t))$ κινείται πάνω στην γραφική παράσταση της f και η τετμημένη $x(t)$ αυξάνεται με ρυθμό 1 μονάδα / sec, τότε να βρείτε τον ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται η τεταγμένη $y(t)$, τη χρονική στιγμή που το σημείο M διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη και κοίλη στο διάστημα $[0, 2]$ με $f(0)=0$ και $f(2)=2$.

- Γ1. α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\alpha \in (0, 2)$ με $f'(\alpha)=1$.
β) Αν για τον αριθμό α του ερωτήματος Γ1(α), ισχύει η ανισότητα $f(x)-f(\alpha) \leq \lambda(x-\alpha)$, για κάθε $x \in [0, 2]$, τότε να δείξετε ότι $\lambda=1$.

Μονάδες 4+4

- Γ2. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}$

β) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\alpha+h)-f(\alpha-2h)}{e^h-1}$, όπου α ο αριθμός του ερωτήματος (Γ1).

Μονάδες 3+3

- Γ3. Να αποδείξετε ότι ισχύει $f(x) \geq x$, για κάθε $x \in [0, 2]$.

Μονάδες 5

- Γ4. Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου που περιλαμβάνεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f , του άξονα xx' και της ευθείας $x=2$, τότε να αποδείξετε ότι ισχύει $2 < E < 2(1+f(\alpha)-\alpha)$, όπου α ο αριθμός του ερωτήματος (Γ1).

Μονάδες 6



2023 | Απρίλιος | Φάση 3 | Διαγωνίσματα Επανάληψης

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση f με $f(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν $f'(x) + f'(-x) = 4$ και $f(x) \cdot f(-x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = 2x + \sqrt{4x^2 + 1}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι ισχύει $f'(x) \cdot \sqrt{4x^2 + 1} = 2f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ορίζεται η αντίστροφη f^{-1} και ότι η εξίσωση $f(x) = \frac{1}{x}$ έχει μοναδική ρίζα x_0 , όπου $x_0 > 0$

Μονάδες 3+4

Δ3. Για τον αριθμό x_0 του ερωτήματος Δ2 να αποδείξετε ότι:

α) $\int_0^{x_0} \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 1}} dx = -\frac{1}{2} \ln x_0$

β) $1 - \int_0^{x_0} f(x) dx = \int_1^{\frac{1}{x_0}} f^{-1}(x) dx$

Μονάδες 3+4

Δ4. Αν η συνάρτηση $F(x)$ είναι αρχική της $f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε να λύσετε την ανίσωση $F(x) - F(x^2) \leq f(x^2) - f(x)$.

Μονάδες 5