



2023 | Απρίλιος | Φάση 3 | Διαγωνίσματα Επανάληψης

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ' Γενικού Λυκείου

Θετικών Σπουδών / Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής

Μ. Δευτέρα 10 Απριλίου 2023 | Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1. Θεωρία
- A2. Θεωρία
- A3. α) Λάθος
β) Σωστό
γ) Σωστό
δ) Λάθος
ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

- B1. Αφού f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} \Rightarrow f$ παραγωγίσιμη στο $x=0 \Rightarrow f$ συνεχής στο $x=0$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \\ \text{με } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = 0 + \eta\mu 0 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{ax+1}) + \beta = 1 + \beta \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + \beta = 0 \Leftrightarrow \beta = -1$$

Αφού f παραγωγίσιμη στο $x=0$ θα ισχύει ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0).$$



$$\text{Όμως } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x + \eta \mu x - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(1 + \frac{\eta \mu x}{x} \right) = 1 + \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\eta \mu x}{x} = 1 + 1 = 2.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\alpha x + 1} + \beta - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\alpha x + 1} - 1}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sqrt{\alpha x + 1} - 1)(\sqrt{\alpha x + 1} + 1)}{x(\sqrt{\alpha x + 1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sqrt{\alpha x + 1})^2 - 1}{x(\sqrt{\alpha x + 1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\alpha x}{x(\sqrt{\alpha x + 1} + 1)} = \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

Άρα πρέπει $\alpha/2 = 2 \Leftrightarrow \alpha = 4$.

B2. Για $\alpha = 4$ και $\beta = -1$ έχουμε $f(x) = \begin{cases} x + \eta \mu x, & x \leq 0 \\ \sqrt{4x + 1} - 1, & x > 0 \end{cases}$

Αν $x < 0$ έχουμε f παραγωγίσιμη με $f'(x) = (x + \eta \mu x)' \Rightarrow f'(x) = 1 + \sigma \nu \nu x \geq 0$ αφού $-1 \leq \sigma \nu \nu x \leq 1 \forall x < 0$, χωρίς να είναι παντού ίση με μηδέν άρα f γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$.

Αν $x > 0$ έχουμε f παραγωγίσιμη με $f'(x) = (\sqrt{4x + 1} - 1)' \Rightarrow$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{4x + 1}} \cdot (4x + 1)' = \frac{2}{\sqrt{4x + 1}} > 0 \Rightarrow f \text{ γνησίως αύξουσα στο } [0, +\infty).$$

Άρα f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και αφού f συνεχής ισχύει ότι

$$f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, +\infty), \text{ αφού ισχύει}$$

$$-1 \leq \eta \mu x \leq 1 \Rightarrow x - 1 \leq x + \eta \mu x \leq x + 1$$

$$\Rightarrow f(x) \leq x + 1, \forall x \leq 0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{και αφού } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 1) = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x + 1} - 1) = +\infty$$

B3. $D_g = (0, +\infty)$

$$D_{g \circ f} = \left\{ x \in D_f / f(x) \in D_g \right\} = \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ \text{και } f(x) > 0 \end{cases} = (0, +\infty)$$



αφού f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ με $f(0) = 0$ οπότε

$$\text{αν } f(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(0) \Leftrightarrow x > 0$$

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \ln(\sqrt{4x+1} - 1), \quad \forall x > 0$$

Επιπλέον h παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$h'(x) = \frac{1}{\sqrt{4x+1}-1} \cdot (\sqrt{4x+1}-1)' \Rightarrow$$

$$h'(x) = \frac{1}{\sqrt{4x+1}-1} \cdot \frac{2}{\sqrt{4x+1}} > 0, \quad \forall x > 0$$

Οπότε h γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty) \Rightarrow h: (0, +\infty) \rightarrow (-1, +\infty)$, άρα ορίζεται η h^{-1} με

$$D_{h^{-1}} = h((0, +\infty))$$

Επειδή h συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ ισχύει

$$h((0, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) \right) = (-1, +\infty) \text{ αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln(\sqrt{4x+1}-1)) \stackrel{u=\sqrt{4x+1}-1}{=} \lim_{u \rightarrow 0^+} (\ln u) = -\infty$$

και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(\sqrt{4x+1}-1)) \stackrel{u=\sqrt{4x+1}-1}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} (\ln u) = +\infty$$

Επιπλέον αν θέσουμε $h(x) = \psi$, $\psi \in \mathbb{R}$, έχουμε

$$\ln(\sqrt{4x+1}-1) = \psi \Leftrightarrow \sqrt{4x+1}-1 = e^\psi \Leftrightarrow \sqrt{4x+1} = e^\psi + 1 \Leftrightarrow 4x+1 = (e^\psi + 1)^2, \quad \psi \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow x = \frac{e^{2\psi} + 2 \cdot e^\psi}{4} \Rightarrow f^{-1}(\psi) = e^\psi \cdot \frac{e^\psi + 2}{4}, \quad \psi \in \mathbb{R}$$

$$\text{Άρα } f^{-1}(x) = e^x \cdot \frac{e^x + 2}{4}, \quad x \in \mathbb{R}$$

B4. Ισχύει ότι

$$\psi(t) = f(x(t)) \Rightarrow \psi'(t) = f'(x(t)) \cdot x'(t) \quad (1)$$

και για $t = t_0$ όπου $x(t_0) = 0$ και $x'(t_0) = 1$ έχουμε αντικαθιστώντας στην (1)

$$\psi'(t_0) = f'(x(t_0)) \cdot x'(t_0) = f'(0) \cdot 1 = 2 \text{ μον / sec}$$

αφού από το B1 προκύπτει $f'(0) = 2$.



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. α) Εφαρμόζουμε για την f Θ.Μ.Τ. στο $[0, 2]$ και έχουμε:

- f συνεχής στο $[0, 2]$
- f παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$ (αφού f παραγωγίσιμη στο $[0, 2]$)

$$\Rightarrow \text{υπάρχει } \alpha \in (0, 2): f'(\alpha) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{2}{2} = 1$$

Επιπλέον f κοίλη στο $[0, 2] \Leftrightarrow f'$ γνησίως φθίνουσα στο $[0, 2]$ άρα υπάρχει μοναδικό $\alpha \in (0, 2): f'(\alpha) = 1$.

β) 1ος τρόπος

Ισχύει $f(x) - f(\alpha) - \lambda(x - \alpha) \leq 0, \forall x \in [0, 2]$.

Θεωρώ $g(x) = f(x) - f(\alpha) - \lambda(x - \alpha), x \in [0, 2]$

και έχω ότι g παραγωγίσιμη στο $[0, 2]$ με $g'(x) = f'(x) - \lambda$ και $g(\alpha) = 0$.

Από την αρχική σχέση προκύπτει ότι $g(x) \leq g(\alpha) \quad \forall x \in [0, 2]$, δηλ. η g παρουσιάζει στο εσωτερικό σημείο α του $[0, 2]$ ολικό μέγιστο και αφού g παραγωγίσιμη στο α από θ. Fermat θα ισχύει

$$g'(\alpha) = 0 \Rightarrow f'(\alpha) - \lambda = 0 \Leftrightarrow 1 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$$

2ος τρόπος

$$\text{Ισχύει ότι } f'(\alpha) = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = 1$$

$$\text{Έχουμε ότι } f(x) - f(\alpha) \leq \lambda(x - \alpha) \quad (1)$$

Αν $x \in [0, \alpha)$ δηλ. $x < \alpha \Leftrightarrow x - \alpha < 0$ τότε από

$$(1) \Rightarrow \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \geq \lambda \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \alpha^-} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \geq \lambda$$

Αν $x \in (\alpha, 2]$ δηλ. $x > \alpha \Leftrightarrow x - \alpha > 0$ από

$$(1) \Rightarrow \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \leq \lambda \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \leq \lambda.$$

$$\text{Επειδή } \lim_{x \rightarrow \alpha^-} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = f'(\alpha)$$

και $f'(\alpha) = 1$ τότε θα ισχύουν: $\lambda \geq 1$ και $\lambda \leq 1$, οπότε $\lambda = 1$.



2023 | Απρίλιος | Φάση 3 | Διαγωνίσματα Επανάληψης

Γ2. α) $D_f = [0, 2]$ και για $x \in (0, 2]$ έχουμε $\frac{f(x)}{x^2} = \frac{f(x)}{x} \cdot \frac{1}{x}$ με

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Επιπλέον $0 < \alpha \xrightarrow[\text{γν. φθίνουσα}]{f'} f'(0) > f'(\alpha) = 1.$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x)}{x} \cdot \frac{1}{x} \right) = f'(0) \cdot (+\infty) = +\infty.$$

β) Για $h \neq 0$ ισχύει $\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha-2h)}{e^h-1} = \frac{\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha-2h)}{h}}{\frac{e^h-1}{h}}$ και ισχύει

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\alpha+h)-f(\alpha-2h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)+f(\alpha)-f(\alpha-2h)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h} + \frac{f(\alpha)-f(\alpha-2h)}{h} \right) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h} + 2 \cdot \frac{f(\alpha)-f(\alpha-2h)}{2h} \right) = \\ &= f'(\alpha) + 2f'(\alpha) = 3 \end{aligned}$$

$$\text{αφού } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\alpha-2h)-f(\alpha)}{-2h} \stackrel{u=-2h}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(\alpha+u)-f(\alpha)}{u} = f'(\alpha) = 1.$$

$$\text{Επιπλέον έχουμε: } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h-1}{h} \stackrel{\frac{0}{0}}{\underset{\text{DLH}}{=}} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(e^h-1)'}{h'} = \lim_{h \rightarrow 0} e^h = e^0 = 1$$

$$\text{Άρα έχουμε: } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\alpha+2h)-f(\alpha-2h)}{e^h-1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(\alpha+2h)-f(\alpha-2h)}{h}}{\frac{e^h-1}{h}} = \frac{3}{1} = 3.$$

Γ3. 1ος τρόπος

Θεωρώ $h(x) = f(x) - x$ και έχω ότι h παραγωγίσιμη με $h'(x) = f'(x) - 1$ και $h'(\alpha) = f'(\alpha) - 1 = 0$ με f' γνησίως φθίνουσα στο $[0, \alpha] \Rightarrow h'$ γνησίως φθίνουσα στο $(0, \alpha]$.



Αν $x \in [0, \alpha]$ δηλ. $x < \alpha \xRightarrow[h' \text{ γν. φθίνουσα}]{h'} h'(x) > h'(\alpha) = 0 \Rightarrow h$ γνησίως αύξουσα στο $[0, \alpha]$,

άρα αν $0 \leq x \leq \alpha \xRightarrow[h \text{ γν. αύξουσα}]{h} h(0) \leq h(x) \Rightarrow 0 \leq f(x) - x \Leftrightarrow f(x) \geq x$.

Αν $x \in (\alpha, 2] \Rightarrow x > \alpha \xRightarrow[h' \text{ γν. φθίνουσα}]{h'} h'(x) < h'(\alpha) = 0 \Rightarrow h$ γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha, 2]$

οπότε αν $\alpha \leq x \leq 2 \Rightarrow h(x) \geq h(2) \Rightarrow f(x) - x \geq f(2) - 2 \Rightarrow f(x) \geq x$.

Άρα τελικά $f(x) \geq x, \forall x \in [0, 2]$.

2ος τρόπος

Για $x = 0$ και $x = 2$ ισχύουν $f(0) = 0$ και $f(2) = 2$.

Αν $0 < x < 2$ εφαρμόζω Θ.Μ.Τ. για την f στα $[0, x]$ και $[x, 2]$ και έχω ότι υπάρχουν

$$\xi_1 \in (0, x) : f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} \text{ και}$$

$$\xi_2 \in (x, 2) : f'(\xi_2) = \frac{f(2) - f(x)}{2 - x} = \frac{2 - f(x)}{2 - x}$$

Όμως $\xi_1 < \xi_2 \xRightarrow[f' \text{ γν. φθίνουσα}]{f'} f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{x} > \frac{2 - f(x)}{2 - x} \xRightarrow[x > 0, 2 - x > 0]{x > 0} (2 - x)f(x) > x(2 - f(x)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2f(x) - xf(x) > 2x - xf(x) \stackrel{:2}{\Leftrightarrow} f(x) > x \quad \forall x \in (0, 2)$$

Άρα $f(x) \geq x \quad \forall x \in [0, 2]$.

Γ4. Έχουμε ότι $f(0) = 0$ άρα $E = \int_0^2 |f(x)| dx$.

Για κάθε $x \in [0, 2]$ έχουμε από Γ2 ότι ισχύει $f(x) - f(\alpha) \leq x - \alpha \Rightarrow f(x) \leq x + f(\alpha) - \alpha$

και από Γ3 ότι $f(x) \geq x \geq 0$.

Δηλαδή $x \leq f(x) \leq x + f(\alpha) - \alpha$ (χωρίς να ισχύει παντού η ισότητα).



$$\begin{aligned} \text{Άρα } \int_0^2 x dx &< \int_0^2 f(x) dx < \int_0^2 (x + f(\alpha) - \alpha) dx \quad \begin{matrix} f(x) \geq 0 \\ \Leftrightarrow \\ |f(x)| = f(x) \end{matrix} \\ \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 &< E < \left[\frac{x^2}{2} + x(f(\alpha) - \alpha) \right]_0^2 \Leftrightarrow 2 < E < 2 + 2(f(\alpha) - \alpha) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2 < E < 2(1 + f(\alpha) - \alpha) \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Ισχύει

$$\begin{aligned} f'(x) + f'(-x) &= 4 \Rightarrow (f(x) - f(-x))' = (4x)' \Rightarrow \\ &\Rightarrow f(x) - f(-x) = 4x + c \\ \text{Για } x=0 \text{ έχω } f(0) - f(0) &= c \Rightarrow c=0 \end{aligned} \Rightarrow f(x) - f(-x) = 4x$$

$$\text{Επιπλέον } f(x) \cdot f(-x) = 1 \quad \begin{matrix} f(x) > 0 \\ \Rightarrow \end{matrix} \quad f(-x) = \frac{1}{f(x)}$$

Άρα:

$$\begin{aligned} f(x) - \frac{1}{f(x)} &= 4x \Rightarrow f^2(x) - 4xf(x) = 1 \quad \begin{matrix} +4x^2 \\ \Rightarrow \end{matrix} \quad f^2(x) - 4xf(x) + 4x^2 = 4x^2 + 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (f(x) - 2x)^2 = 4x^2 + 1 \quad (1) \end{aligned}$$

Θεωρώ $g(x) = f(x) - 2x$ και έχω από (1) ότι $g^2(x) = 4x^2 + 1 > 0 \Rightarrow g(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ και αφού g συνεχής έχουμε ότι η g θα διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Για $x=0$ έχουμε $g(0) = f(0) - 2 \cdot 0 = f(0) > 0$, αφού $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Άρα $g(x) > 0 \Rightarrow f(x) - 2x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{Από (1)} &\Rightarrow \sqrt{(f(x) - 2x)^2} = \sqrt{4x^2 + 1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |f(x) - 2x| = \sqrt{4x^2 + 1} \quad \begin{matrix} f(x) - 2x > 0 \\ \Leftrightarrow \end{matrix} \quad f(x) - 2x = \sqrt{4x^2 + 1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f(x) = 2x + \sqrt{4x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$



2023 | Απρίλιος | Φάση 3 | Διαγωνίσματα Επανάληψης

Δ2. f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = (2x + \sqrt{4x^2 + 1})' \Rightarrow$

$$\Rightarrow f'(x) = 2 + \frac{(4x^2 + 1)'}{2\sqrt{4x^2 + 1}} = 2 + \frac{8x}{2\sqrt{4x^2 + 1}} = 2 + \frac{4x}{\sqrt{4x^2 + 1}} \Rightarrow f'(x) = \frac{2\sqrt{4x^2 + 1} + 4x}{\sqrt{4x^2 + 1}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{2(\sqrt{4x^2 + 1} + 2x)}{\sqrt{4x^2 + 1}} \Leftrightarrow f'(x) \cdot \sqrt{4x^2 + 1} = 2f(x) \Rightarrow f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

και αφού $f(x) > 0$

$\Rightarrow f$ αύξουσα στο $\mathbb{R} \Rightarrow f \geq 1$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - \frac{1}{x}, x \neq 0$.

Αν $x < 0$ τότε έχω

$$\left. \begin{array}{l} f(x) > 0 \\ \text{και } \frac{1}{x} < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) > \frac{1}{x}, \forall x < 0.$$

Αν $x > 0$ τότε h παραγωγίσιμη με $h'(x) = \left(f(x) - \frac{1}{x}\right)' \Rightarrow h'(x) = f'(x) + \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow$

h γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ και αφού h συνεχής

$$h((0, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)\right) \text{ με}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(f(x) - \frac{1}{x}\right) = f(0) - (+\infty) = -\infty$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 1} + 2x) - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} + 2x\right) - 0 \stackrel{|x|=x}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x\left(\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} + 2\right)\right) = (+\infty) \cdot 4 = +\infty$$

$$\text{Άρα } h((0, +\infty)) = (-\infty, +\infty).$$

Επειδή $0 \in (-\infty, +\infty) = h((0, +\infty))$ και h συνεχής και γνησίως αύξουσα στο

$$(0, +\infty) \text{ υπάρχει μοναδικό } x_0 \in (0, +\infty) \text{ ώστε } h(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) = \frac{1}{x_0}.$$



Δ3. α) Από Δ2 ισχύει $\frac{f'(x)}{2f(x)} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $f(x) > 0$. Άρα

$$\int_0^{x_0} \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}} dx = \int_0^{x_0} \frac{f'(x)}{2f(x)} dx = \frac{1}{2} \int_0^{x_0} \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \frac{1}{2} [\ln|f(x)|]_0^{x_0} = \frac{1}{2} (\ln f(x_0) - \ln f(0)) = \frac{1}{2} \left(\ln \frac{1}{x_0} - \ln 1 \right) = -\frac{1}{2} \ln x_0.$$

β) Θέτω $f^{-1}(x) = u \Leftrightarrow x = f(u) \Leftrightarrow dx = f'(u) du$

$$u_1 = f^{-1}(1) = 0 \text{ αφού } f(0) = 1$$

$$u_2 = f^{-1}\left(\frac{1}{x_0}\right) = x_0 \text{ αφού } f(x_0) = \frac{1}{x_0}$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } \int_1^{\frac{1}{x_0}} f^{-1}(x) dx &= \int_0^{x_0} u \cdot f'(u) du = [u \cdot f(u)]_0^{x_0} - \int_0^{x_0} u' \cdot f(u) du = \\ &= x_0 \cdot f(x_0) - 0 \cdot f(0) - \int_0^{x_0} f(u) du = x_0 \cdot \frac{1}{x_0} - \int_0^{x_0} f(x) dx = 1 - \int_0^{x_0} f(x) dx \end{aligned}$$

Δ4. Η ανίσωση γράφεται ισοδύναμα: $F(x) + f(x) \leq F(x^2) + f(x^2)$, $x \in \mathbb{R}$ (1)

Θεωρώ την $\varphi(x) = F(x) + f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ και έχω ότι φ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$\varphi'(x) = F'(x) + f'(x) \stackrel{F'(x)=f(x)}{=} f(x) + f'(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \varphi$ γνησίως
αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και από την (1) έχουμε

$$\varphi(x) \leq \varphi(x^2) \stackrel{\text{γν. αύξουσα}}{\Leftrightarrow} x \leq x^2 \Leftrightarrow x^2 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0 \text{ ή } x \geq 1.$$