ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β' Γενικού Λυκείου

Θετικών Σπουδών

Πέμπτη 20 Απριλίου 2023 | Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

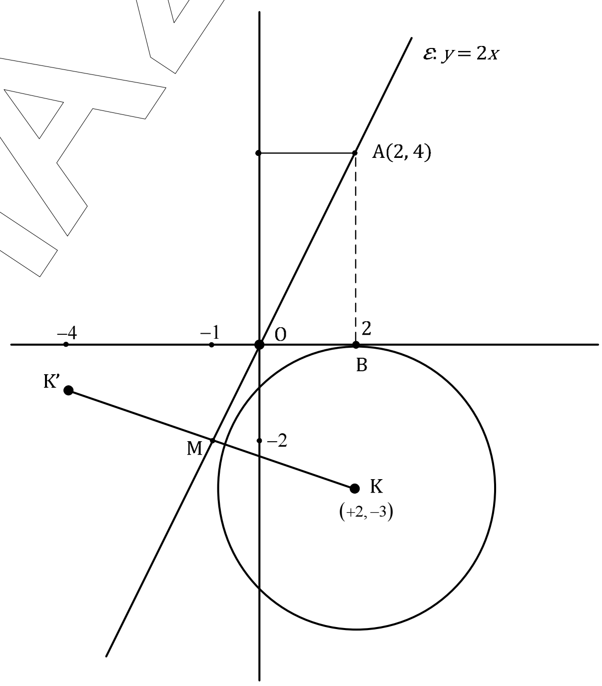
ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδες 81–82.

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 84.

Α3. i)→Λ, ii)→Σ, iii)→Λ, iv)→Λ, v)→Λ

ΘΕΜΑ Β



B1. Πρέπει $A^2+B^2-4\Gamma>0 \Leftrightarrow (-4)^2+6^2-4\cdot 4=16+36-16=36>0$ κύκλος με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right):(2,-3)$ και ακτίνα $\rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}=\frac{\sqrt{36}}{2}=\frac{6}{2}=3$.

B2. $(AK)=\sqrt{(2-2)^2+(4+3)^2}=7>3=\rho$.

B3. $\lambda_\varepsilon=2 \Rightarrow \lambda_{KK'}=-\frac{1}{2}$.

$KK':y+3=-\frac{1}{2}(x-2) \Rightarrow 2y+6=-x+2 \Leftrightarrow x+2y+4=0$.

Το σημείο Μ είναι η λύση του συστήματος:

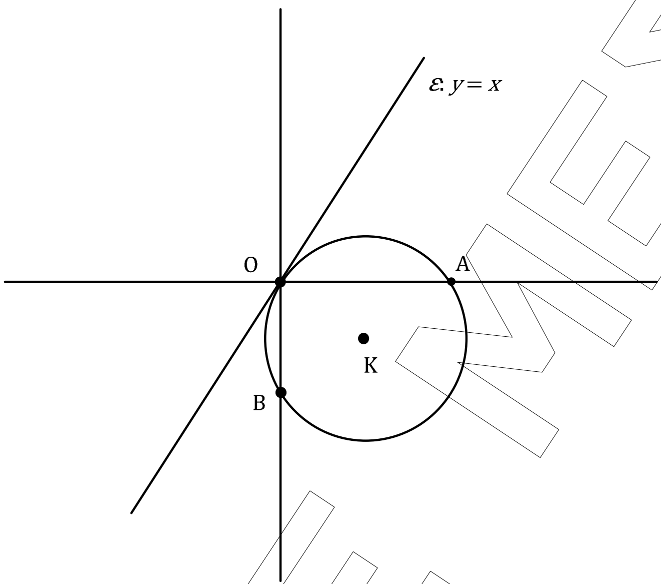
$$\left.\begin{array}{r} KK':x+2y+4=0 \\ \varepsilon:y=2x \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x+2\cdot 2x+4=0 \\ y=2x \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 5x=-4 \\ y=2x \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=-\frac{4}{5} \\ y=-\frac{8}{5} \end{array}$$

Το Μ είναι το μέσον του ΚΚ′. Αν Κ′ (x,y):

$$\left.\begin{cases} \frac{2+x}{2}=-\frac{4}{5} \\ \frac{-3+y}{2}=-\frac{8}{5} \end{cases}\right\} \begin{array}{l} 5(2+x)=-8 \Leftrightarrow 10+5x=-8 \Leftrightarrow x=-\frac{18}{5} \\ 5(-3+y)=-16 \Leftrightarrow -15+5y=-16 \Leftrightarrow y=-\frac{1}{5} \end{array} \quad K'\left(-\frac{18}{5},-\frac{1}{5}\right)$$

B4. $\varepsilon(OKA)=\frac{1}{2}\cdot(AK)\cdot(OB)=\frac{1}{2}\cdot 7\cdot 2=7$.

ΘΕΜΑ Γ



Γ1. $x^2 - 2x + y^2 - 4\lambda y = 0$ (1)

$A^2 + B^2 - 4\Gamma = (-2)^2 + (-4\lambda)^2 - 4\cdot 0 = 4 + 16\lambda^2 > 0$

$K(-A/2, -B/2) = (1, 2\lambda),\quad \rho = \dfrac{\sqrt{4+16\lambda^2}}{2} = \sqrt{1+4\lambda^2}$

Γ2. K $(1, 2\lambda)$ άρα το K ανήκει στην κατακόρυφη ευθεία $x = 1$

Γ3. α) Για να εφάπτεται ο κύκλος στην ευθεία $\varepsilon\colon y = x \Leftrightarrow x - y = 0$

$d(K,\varepsilon) = \rho \Leftrightarrow \dfrac{|1 - 2\lambda + 0|}{\sqrt{1+1}} = \sqrt{1+4\lambda^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |1-2\lambda| = \sqrt{2}\cdot\sqrt{1+4\lambda^2} \Leftrightarrow (1-2\lambda)^2 = 2(1+4\lambda^2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 - 4\lambda + 4\lambda^2 = 2 + 8\lambda^2 \Leftrightarrow 4\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2\lambda+1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\dfrac{1}{2}.$

β) Αν $\lambda = -1/2$ ο κύκλος είναι της μορφής:

$C\colon x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$ με K $(1, -1)$ και $\rho = \sqrt{2}$

ο κύκλος τέμνει τον

$yy'(x=0): y^2+2y=0 \Leftrightarrow y(y+2)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=0$ ή $y=-2$ $\quad$ B(0,−2)

ο κύκλος τέμνει τον

$xx'(y=0): x^2+2x=0 \Leftrightarrow x(x-2)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0$ ή $x=2$ $\quad$ A(2, 0)

γ) Το Κ είναι μέσο του Α, Β. οπότε τα σημεία Α, Β είναι αντιδιαμετρικά

K (1, −1) $\quad$ A (2, 0) $\quad$ B (0, −2)

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. α) $y^2=x \Rightarrow \mathrm{P}=\frac{1}{2}$. $\quad \mathrm{E}\left(\frac{\mathrm{P}}{2},0\right):\left(\frac{1}{4},0\right)$ $\quad \delta: x=-\frac{\mathrm{P}}{2}$ $\quad x=-\frac{1}{4}$

β) Οι εφαπτόμενες της παραβολής είναι της μορφής:

$yy_1=\mathrm{P}(x+x_1)$ δηλαδή $yy_1=\frac{1}{2}(x+x_1)$

Διέρχονται από το M(−1, 0): $0=\frac{1}{2}(-1+x_1) \Leftrightarrow x_1=1$

Ανήκουν στην παραβολή C: $y^2=x \Rightarrow y_1^2=1 \Leftrightarrow y_1=\pm 1$. Άρα Α (1, 1) και Β (1, −1).

Οι εφαπτόμενες λοιπόν θα είναι:

στο $\mathrm{A}: \varepsilon_1: 1\cdot y=\frac{1}{2}(x+1) \Leftrightarrow 2y=x+1 \Leftrightarrow x-2y+1=0$

στο $\mathrm{B}: \varepsilon_2: -1\cdot y=\frac{1}{2}(x+1) \Leftrightarrow -2y=x+1 \Leftrightarrow x+2y+1=0$

Δ2. α) $\mathrm{K}(0,0)$ και $\mathrm{P}=d(0,\delta)=\frac{1}{4}$.

Άρα η εξίσωση του κύκλου είναι $x^2+y^2=\frac{1}{16}$.

β) $d_{\min}=\mathrm{MP}=\frac{3}{4}$. $\quad (\mathrm{MO}-\mathrm{P})$

$$d_{\max} = \text{ME} = \frac{5}{4}. \quad (\text{MO+P})$$

γ) $(\text{MA}) = \sqrt{(-1-1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{5}$

$(\text{MB}) = \sqrt{(-1-1)^2 + (0+1)^2} = \sqrt{5}$

$(\text{MA}) = (\text{MB})$.

Δ3.