ΑΛΓΕΒΡΑ

Β' Γενικού Λυκείου

Γενικής Παιδείας

Μ. Δευτέρα 10 Απριλίου 2023 | Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σελ.134 Σχολικό βιβλίο

Α2. Ορισμός σελ.32 Σχολικό βιβλίο

Α3. Ορισμός σελ.33 Σχολικό βιβλίο

Α4.
i. Σ
ii. Λ
iii. Σ
iv. Λ
v. Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Επειδή $P(-1) = (-1)^3 - 1 + 2 = 0$, το $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x + 1)$.

Β2. Με βάση το σχήμα Horner το πηλίκο της διαίρεσης είναι $\pi(x) = (x^2 - x + 2)$ και το υπόλοιπο είναι 0. Επομένως,

$$P(x) = (x + 1)(x^2 - x + 2)$$

Β3. Το τριώνυμο $(x^2 - x + 2)$ έχει $\Delta = -7 < 0$, άρα $(x^2 - x + 2) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε:

$$P(x) < 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - x + 2) < 0 \Leftrightarrow x + 1 < 0 \Leftrightarrow x < -1.$$

ΘΕΜΑ Γ

$$f(x) = \sqrt{x^2 + ax + a + 3} - 2$$

Γ1. $f(4) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{16 + 4a + a + 3} - 2 = 1 \Leftrightarrow \sqrt{19 + 5a} = 3$

Περιορισμός: $19 + 5\alpha \geq 0 \Leftrightarrow 5\alpha \geq -19 \Leftrightarrow \alpha \geq -\frac{19}{5}$

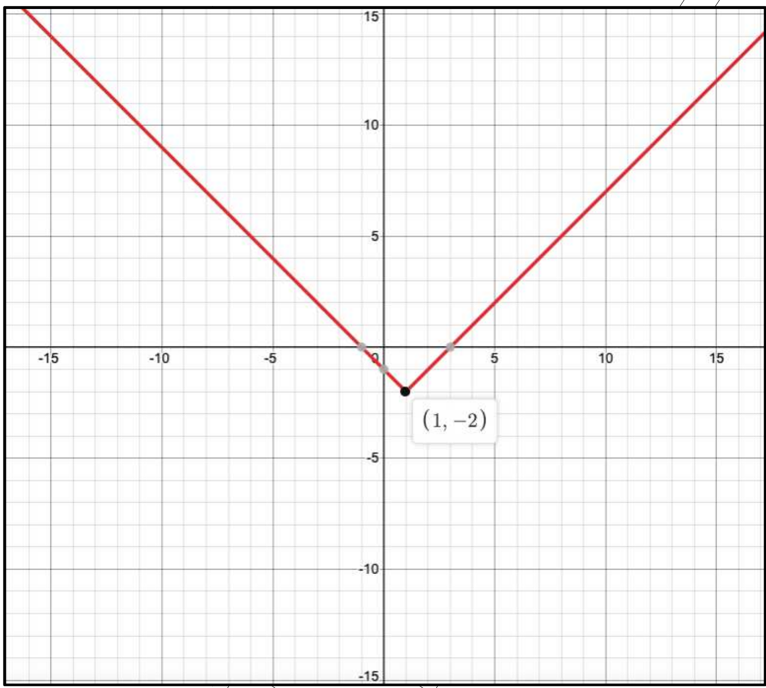
$19 + 5\alpha = 9 \Leftrightarrow 5\alpha = -10 \Leftrightarrow \alpha = -2$ Δεκτή.

Για $\alpha = -2$: $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$, πρέπει $x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow$

$(x-1)^2 \geq 0$ που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα $D_f = \mathbb{R}$.

$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1} - 2 \Leftrightarrow f(x) = |x - 1| - 2.$

Γ2. Η γραφική παράσταση της f προκύπτει από την $g(x) = |x|$ με οριζόντια μετατόπιση κατά μία μονάδα προς τα δεξιά και δυο μονάδες προς τα κάτω.



Γ3. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

Γ4. Η f παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο $x_0 = 1$ το $f(1) = -2$.

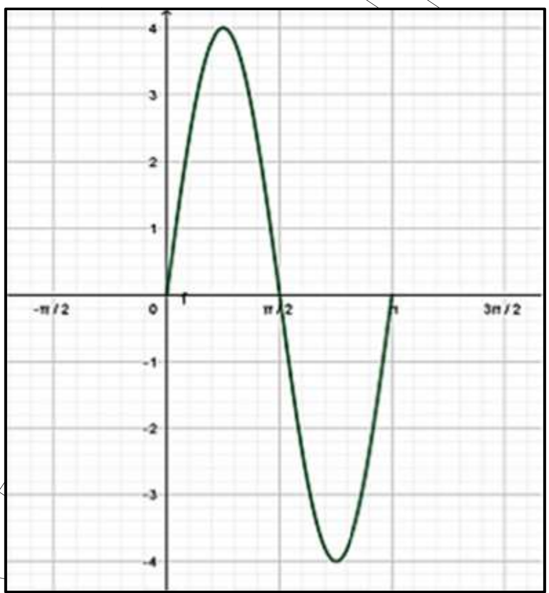
ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f(x) = \alpha συν\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) - 2ημ(\pi + 2x) = \alpha ημ2x - 2(-ημ2x) = \alpha ημ2x + 2ημ2x = (\alpha + 2)ημ2x$

Δ2. **i.** Επειδή $\alpha > 0$ η f έχει μέγιστη τιμή το $\alpha + 2$, άρα $\alpha + 2 = 4 \Leftrightarrow \alpha = 2$.

ii. Η περίοδος της f είναι $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

Δ3.



Δ4. Οι τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f *και* g είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = g(x)$.

Είναι $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 4ημ2x = 5 - συν^2 2x \Leftrightarrow 4ημ2x = 5 - (1 - ημ^2 2x) \Leftrightarrow 4ημ2x = 5 - 1 + ημ^2 2x \Leftrightarrow ημ^2 2x - 4ημ2x + 4 = 0 \Leftrightarrow (ημ2x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow ημ2x - 2 = 0 \Leftrightarrow ημ2x = 2$ **Αδύνατη.**

Αφού η παραπάνω εξίσωση είναι αδύνατη, δεν υπάρχουν σημεία τομής των δύο γραφικών παραστάσεων.

ΘΕΜΑ Δ (εναλλακτικό)

Δ1. $P(x)=e^{\ln e}x^3+4x^2\ln\sqrt{e}\ +2\ =\ ex^3+4x^2\ln e^{\frac{1}{2}}\ +\ 2\ =ex^3+4x^2\cdot\frac{1}{2}+2=$

$=ex^3+2x^2+2$

Δ2. Οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ με την ευθεία ε: $y=\ ex+\ 4$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$P(x)=\ ex+4\Leftrightarrow ex^3+2x^2+2=ex+4\Leftrightarrow ex^3+2x^2-2=0\Leftrightarrow$

$ex\left(x^2-1\right)+2\left(x^2-1\right)=0\Leftrightarrow\left(x^2-1\right)\left(ex+2\right)=0\Leftrightarrow\left(x^2-1=0\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=\pm1\right)$ ή

$\left(ex+2=0\Leftrightarrow ex=-2\Leftrightarrow x=-\frac{2}{e}\right)$

Δ3. Για να βρούμε τα διαστήματα του x που η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ είναι πάνω από την ευθεία ε: $y=\ ex+\ 4$ θα λύσουμε την ανίσωση:

$P(x)>\ ex+4\Leftrightarrow\left(x^2-1\right)\left(ex+2\right)>0\Leftrightarrow x\in\left(-1,-\frac{2}{e}\right)\cup\left(1,+\infty\right)$.

x	$-\infty$		-1		$-e/2$		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$ex+2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Δ4. Παρατηρούμε ότι το $P(e)-e^2-4$ είναι η τιμή του $P(x)-(ex+4)$ για $x=e$, οπότε με βάση το προηγούμενο σκέλος είναι $P(e)-e^2-4>0$, αφού $e>1$.