ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Α' Γενικού Λυκείου

Σάββατο 29 Απριλίου 2023 | Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1) σχολικό βιβλίο σελίδα **109**

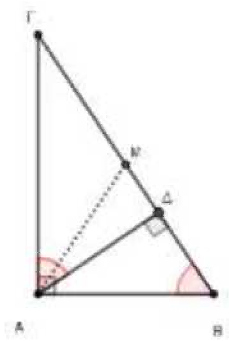
Α2) σχολικό βιβλίο σελίδα **107**

Α3) **i.** Λ **ii.** Σ **iii.** Λ **iv.** Λ **v.** Σ

ΘΕΜΑ Β

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=90^o$ και $\hat{B}>\hat{\Gamma}$, ΑΔ το ύψος του προς στην ΒΓ και ΑΜ διάμεσός του στην πλευρά ΒΓ.

Β1) Για τις οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma(\hat{A}=90^o)$ ισχύει ότι: $\hat{B}+\hat{\Gamma}=90^o \Leftrightarrow \hat{B}=90^o-\hat{\Gamma}(1)$



Αφού ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου ΑΒΓ τότε $\widehat{A\Delta\Gamma}=90^0$, οπότε το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ορθογώνιο.

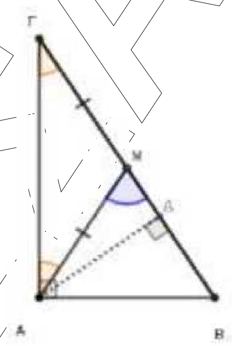
Για τις οξείες γωνίες του ορθογωνίου τριγώνου ΑΔΓ ισχύει ότι:

$\widehat{\Gamma A\Delta}+\hat{\Gamma}=90^o \Leftrightarrow \widehat{\Gamma A\Delta}=90^o-\hat{\Gamma}(2)$.

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει $\hat{B}=\widehat{\Gamma A\Delta}$.

Β2) Αφού η ΑΜ είναι διάμεσος στην υποτείνουσα ΒΓ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, τότε

θα είναι $\mathrm{AM} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{2} = \mathrm{M\Gamma}$, αφού Μ μέσο της ΒΓ.



Αφού ΑΜ = ΜΓ τότε το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισοσκελές γιατί έχει δυο πλευρές του ίσες, οπότε $\hat{\Gamma} = \widehat{\mathrm{MA\Gamma}}$ (3) ως γωνίες προσκείμενες στη βάση του ΑΓ.

Στο τρίγωνο ΑΜΔ η γωνία $\widehat{\mathrm{AM\Delta}}$ είναι εξωτερική της γωνίας $\widehat{\mathrm{AM\Gamma}}$ του τριγώνου ΑΜΓ, οπότε θα είναι ίση με το άθροισμα των απέναντι εσωτερικών γωνιών του τριγώνου, δηλαδή $\widehat{\mathrm{AM\Delta}} = \widehat{\mathrm{MA\Gamma}} + \hat{\Gamma}$ και αφού είναι $\hat{\Gamma} = \widehat{\mathrm{MA\Gamma}}$ (σχέση (3)), τότε θα είναι $\widehat{\mathrm{AM\Delta}} = \hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} \Leftrightarrow \widehat{\mathrm{AM\Delta}} = 2\hat{\Gamma}$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1) Η ΑΓ και ΡΜ διχοτομούνται κάθετα στο Σ επομένως το ΑΜΓΡ είναι ρόμβος.

Γ2) ΝΚ είναι παράλληλη της ΑΒ από υπόθεση και η ΒΓ τέμνουσα. Επομένως η γωνία $\widehat{\mathrm{KN\Gamma}} = \hat{\mathrm{B}}$ (1)

Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ άρα $\hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma}$ (2) Από (1) και (2) $\widehat{\mathrm{KN\Gamma}} = \hat{\Gamma}$ και το τρίγωνο ΝΚΓ είναι ισοσκελές.

Γ3) Από τον ρόμβο ΑΜΓΡ Η ΜΓ είναι παράλληλη με την ΑΡ και $\mathrm{AP} \perp \mathrm{B\Gamma}$ αφού το ΑΔ είναι ύψος στο τρίγωνο ΑΒΓ, επομένως $\mathrm{M\Gamma} \perp \mathrm{B\Gamma}$ και το τρίγωνο ΜΓΝ είναι ορθογώνιο. Άρα

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{\mathrm{NM\Gamma}} = 90^{\circ} - \widehat{\mathrm{MN\Gamma}} = 90^{\circ} - \hat{\mathrm{B}} \\ \widehat{\mathrm{M\Gamma K}} = 90 - \hat{\Gamma} = 90 - \hat{\mathrm{B}} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{\mathrm{NM\Gamma}} = \widehat{\mathrm{M\Gamma K}} \Rightarrow$$ επομένως το τρίγωνο ΜΚΓ είναι ισοσκελές και $\mathrm{K\Gamma} = \mathrm{KM}$. (3)

Το τρίγωνο ΝΜΓ είναι ισοσκελές άρα ΝΚ = ΚΓ (4).

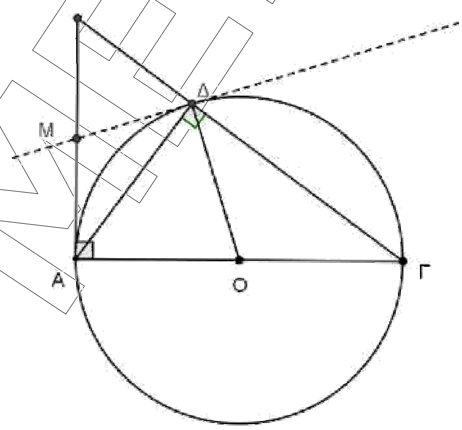
Από (3),(4) η ΚΝ = ΚΜ και το Κ μέσο του ΝΜ.

Το Κ είναι μέσο του ΝΜ, το Σ μέσο του ΜΡ επομένως ΣΚ παράλληλη με την ΡΝ. Η

ΣΚ είναι κάθετη στην ΜΡ επομένως και η ΡΝ κάθετη στην ΜΡ και το τρίγωνο ΜΡΝ είναι ορθογώνιο.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1) Φέρνουμε την ΟΔ. Είναι ΟΔ = ΟΑ = ΟΓ ως ακτίνες του κύκλου κέντρου Ο με διάμετρο την πλευρά ΑΓ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ. Οπότε στο τρίγωνο ΑΔΓ η ΟΔ είναι διάμεσος στην πλευρά του ΑΓ, αφού το Ο ως κέντρο είναι το μέσο, και ισχύει $ΟΔ = \frac{ΑΓ}{2}$.



Επομένως το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά ΑΓ ορθή τη γωνία $\widehat{ΑΔΓ}$, άρα οι οξείες γωνίες του είναι συμπληρωματικές, δηλαδή $\widehat{ΓΑΔ} + \hat{Γ} = 90^o \Leftrightarrow \widehat{ΓΑΔ} = 90^o - \hat{Γ}$ (1).

Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο, άρα οι οξείες γωνίες του είναι συμπληρωματικές, δηλαδή $\hat{Δ} + \hat{Γ} = 90^o \Leftrightarrow \hat{Δ} = 90^o - \hat{Γ}$ (2). Από τις (1), (2) προκύπτει: ΓΑΔ = Β.

Δ2) Το τρίγωνο ΟΓΔ είναι ισοσκελές διότι ΟΓ = ΟΔ ως ακτίνες του κύκλου, οπότε οι προσκείμενες γωνίες στη βάση του ΓΔ θα είναι ίσες, δηλαδή $\hat{Γ} = \widehat{ΟΔΓ}$ (3).

Επειδή η ΔΜ είναι εφαπτόμενη του κύκλου στο σημείο Δ, η ακτίνα στο σημείο επαφής θα είναι κάθετη στην εφαπτομένη $(ΟΔ \perp ΔΜ)$, οπότε $\widehat{ΜΔΟ} = 90^0$ (4)

Τότε $\widehat{ΜΔΒ} = 180^o - \widehat{ΜΔΟ} - \widehat{ΟΔΓ} = 180^o - 90^o - \hat{Γ}$ λόγω των σχέσεων (3) και (4), δηλαδή τελικά $\widehat{ΜΔΒ} = 90^o - \hat{Γ}$ (5).

Από τις σχέσεις (2) και (5) προκύπτει ότι θα είναι $\widehat{ΜΔΒ} = \hat{Β}$. Άρα το τρίγωνο ΔΜΒ είναι ισοσκελές με ΜΔ = ΜΒ (3).

Δ3) Επειδή είναι $\hat{Α} = 90^o$, θα είναι $ΜΑ \perp ΟΑ$ και $ΟΔ \perp ΔΜ$, οπότε τα ΜΑ και ΜΔ είναι εφαπτόμενα τμήματα, άρα θα είναι ίσα, δηλαδή ΜΑ = ΜΔ (4).

Από τις (3), (4) βρίσκουμε ότι ΜΑ = ΜΒ, δηλαδή το Μ είναι μέσο του ΑΒ.