ΑΛΓΕΒΡΑ

Α' Γενικού Λυκείου

Μ. Δευτέρα 10 Απριλίου 2023 | Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σελίδα 69 Σχολικό Βιβλίο

Α2. Σελίδα 63 Σχολικό Βιβλίο

Α3.
i. Σ
ii. Λ
iii. Λ
iv. Λ
v. Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Είναι $2 \leq \alpha \leq 3 \Leftrightarrow 2-3 \leq \alpha - 3 \leq 3-3 \Leftrightarrow -1 \leq \alpha - 3 \leq 0$, άρα $|\alpha - 3| = 3 - \alpha$.

Είναι $-2 \leq \beta \leq -1 \Leftrightarrow -2+2 \leq \beta + 2 \leq -1 + 2 \Leftrightarrow 0 \leq \beta + 2 \leq 1$

άρα $|\beta + 2| = \beta + 2$.

Β2. Είναι $2 \leq \alpha \leq 3 \; \kappa\alpha\iota \; -2 \leq \beta \leq -1$, οπότε με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει

$$0 \leq \alpha + \beta \leq 2.$$

Β3. Επειδή $\alpha + \beta \geq 0$, $\alpha - 3 \leq 0$ και $\beta + 2 \geq 0$, είναι:

$|\alpha + \beta| + |\alpha - 3| - |\beta + 2| = \alpha + \beta + 3 - \alpha - \beta - 2 = 1$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για να έχει ρίζες πραγματικές πρέπει:

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow (-2\lambda)^2 - 4\cdot 1\cdot(\lambda^2 - 2\lambda - 3) \geq 0 \Leftrightarrow 4\lambda^2 - 4\lambda^2 + 8\lambda + 12 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 8\lambda \geq -12 \Leftrightarrow \lambda \geq -\frac{4}{3}$$

Γ2. Το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης είναι:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{-2\lambda}{1} = 2\lambda, \qquad P = x_1\cdot x_2 = \frac{\lambda^2 - 2\lambda - 3}{1} = \lambda^2 - 2\lambda - 3.$$

$|x_1 + x_2 - 3| < 1 \Leftrightarrow |2\lambda - 3| < 1 \Leftrightarrow -1 < 2\lambda - 3 < 1$
$\Leftrightarrow 2 < 2\lambda < 4 \Leftrightarrow 1 < \lambda < 2.$

Γ3. Οι ρίζες της εξίσωσης είναι θετικές όταν $\Delta > 0,\ P > 0$ και $S > 0$.

$P > 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 3 > 0 \Leftrightarrow \lambda < -1$ ή $\lambda > 3$ (1)

$S > 0 \Leftrightarrow 2\lambda > 0 \Leftrightarrow \lambda > 0$ (2)

Με συναλήθευση των (1), (2) προκύπτει ότι $\lambda > 3$.

Γ4. Όταν $\lambda < -2$, τότε η διακρίνουσα του τριωνύμου $x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - 2\lambda - 3$ είναι αρνητική, οπότε

$x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - 2\lambda - 3 > 0$ για κάθε τιμή του x, οπότε:

$|x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - 2\lambda - 3| + 2\lambda + 3 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - 2\lambda - 3 + 2\lambda + 3 \leq 0$

$\Leftrightarrow (x-\lambda)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x - \lambda = 0 \Leftrightarrow x - \lambda$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για να είναι η εξίσωση 2[ου] βαθμού θα πρέπει $\lambda^2 - \lambda \neq 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 1) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 0$ και $\lambda - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 1$

Δ2. $(\lambda^2 - x) \cdot x^2 - (\lambda^2 - 1) \cdot x + \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 1) \cdot x^2 - (\lambda - 1)(\lambda + 1) \cdot x + (\lambda - 1) = 0 \overset{:(\lambda-1)\neq 0}{\Longleftrightarrow} \lambda \cdot x^2 - (\lambda + 1) \cdot x + 1 = 0$

Δ3. $\Delta = [-(\lambda + 1)^2] - 4\lambda = \lambda^2 + 2\lambda + 1 - 4\lambda = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 > 0 \ (\lambda \neq 1)$

Άρα έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

Δ4. $x_1 = \frac{\lambda+1+\lambda-1}{2\lambda} = \frac{2\lambda}{2\lambda} = 1$ και $x_2 = \frac{\lambda+1-\lambda+1}{2\lambda} = \frac{2}{2\lambda} = \frac{1}{\lambda}$