ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2022
Β΄ ΦΑΣΗ

Ε_3.Μλ3ΘΟ(ε)

ΤΑΞΗ: Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Τετάρτη 27 Απριλίου 2022
Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

Θέμα Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.
Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β).

Μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού.

Μονάδες 4

Α2. Πότε η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f, όταν $x\to+\infty$.

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν f,g,h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $ho(gof)$, τότε ορίζεται και η $(hog)of$ και ισχύει $ho(gof)=(hog)of$

β) Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)$ τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0.

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$, τότε ισχύει πάντα $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$.

δ) Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα.

ε) Αν οι συναρτήσεις f,g είναι συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$ και ισχύει $f(x)\leq g(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ τότε $\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx \leq \int_{\beta}^{\alpha} g(x)dx$.

Μονάδες 10

Θέμα Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $\varphi(x)=\frac{e^x}{x}, x\neq 0$ και $g(x)=\ln x, x>0$

Β1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f=\varphi o g$.

Μονάδες 4

➢ Αν $f(x)=\frac{x}{\ln x}, 0<x\neq 1$, τότε

Β2. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία την f και να βρείτε τα ακρότατα.

Μονάδες 5

Β3. Να μελετήσετε την κυρτότητα της f και να βρείτε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

Μονάδες 8

Β4. Να βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f και να τη σχεδιάσετε.

Μονάδες 8

Θέμα Γ

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \varepsilon\varphi x+\alpha, & -\frac{\pi}{2}<x<0 \\ \ln(x+1)+1+\beta, & x\geq 0 \end{cases}$

όπου α,β ακέραιοι για την οποία ισχύει το θεώρημα του Bolzano στο $\left[-\frac{\pi}{4},e-1\right]$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=0$ και $\beta=-1$.

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του $\lambda>0$ ώστε να ισχύει
$f(x)\leq \frac{x^2-x}{2}+\ln\lambda$, για κάθε $x>0$.

Μονάδες 6

Γ3. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\mathrm{I}=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{e-1} f(x)\,dx$.

Μονάδες 8

Γ4. Ένα κινητό $\mathrm{M}(\alpha, f(\alpha))$ με $\alpha>0$ κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\ln(x+1),\ x>0$ έτσι ώστε η τετμημένη του να μεταβάλλεται με ρυθμό $1cm/\sec$. Αν (ε) είναι η εφαπτομένη της C_f στο Μ και θ η γωνία που σχηματίζει με τον άξονα x΄x,. να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας θ, τη χρονική στιγμή t_0 που η τετμημένη του Μ είναι ίση με $\sqrt{3}-1\,cm$.

Μονάδες 5

Θέμα Δ

Έστω η συνάρτηση $f(x)=e^x-\alpha x$, όπου $\alpha, x\in\mathbb{R}$.

Δ1. Αν $f(x)\geq 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να βρείτε την τιμή του α.

Μονάδες 5

➢ Για την τιμή $\alpha=1$

Δ2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, την εφαπτομένη της στο σημείο $\mathrm{M}(1, e-1)$ και τον άξονα y΄y.

Μονάδες 6

Δ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\ln\dfrac{e^x}{e^x-x},\ x\in\mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της g έχει δύο σημεία καμπής, έστω $\mathrm{A}(x_1, g(x_1))$ και $\mathrm{B}(x_2, g(x_2))$ με $x_1<x_2$.

Μονάδες 8

Δ4. Για τη συνάρτηση g του ερωτήματος Δ3, να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2\in\mathbb{R}$ με $\xi_1<\xi_2$ τέτοιοι ώστε να ισχύει: $(1-x_1)\cdot g'(\xi_1)>(x_2-1)\cdot g'(\xi_2)$.

Μονάδες 6

Καλή επιτυχία