

ΤΑΞΗ: Β' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ/ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Σάββατο 7 Μαΐου 2022
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σελίδα 134

Α2. Σελίδα 33

Α3. Σ Λ Σ Σ Λ

ΘΕΜΑ Β

$$\text{B1. } \begin{cases} P(1)=0 \\ P(2)=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+\alpha-5+\beta=0 \\ 16+4\alpha-10+\beta=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=3 \\ 4\alpha+\beta=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=3 \\ 3\alpha=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=1 \\ \beta=2 \end{cases}$$

$$\text{B2. } P(x)=2x^3+x^2-5x+2$$

Κάνουμε σχήμα Horner, φυσικά με το 1.

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -5 & 2 & 1 \\ & 2 & 3 & -2 & \\ \hline 2 & 3 & -2 & 0 & \end{array}$$

$$P(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)(2x^2+3x-2)=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=-2 \text{ ή } x=\frac{1}{2}$$

B3. α)

$$\begin{array}{r} 2 \quad 1 \quad -5 \quad 2 \quad | \quad 2 \\ \quad 4 \quad 10 \quad 10 \\ \hline 2 \quad 5 \quad 5 \quad 12 \end{array}$$

$$P(x) = (x-2)(2x^2 + 5x + 5) + 12$$

β) $P(x) - 12 < 0 \Leftrightarrow (x-2)(2x^2 + 5x + 5) < 0 \Leftrightarrow x-2 < 0 \Leftrightarrow x < 2$

Το τριώνυμο $2x^2 + 5x + 5$ είναι πάντοτε θετικό αφού έχει αρνητική διακρίνουσα.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Επειδή από την θεωρία ως γνωστόν ισχύει :

$$\eta\mu(\pi - x) = \eta\mu x, \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \eta\mu x$$

$$, \sigma\upsilon\nu(2\pi - x) = \sigma\upsilon\nu x, \eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\sigma\upsilon\nu x$$

και τέλος $\sigma\upsilon\nu(\pi - x) = -\sigma\upsilon\nu x$ η $f(x)$ γίνεται :

$$f(x) = \eta\mu^2 x + 2\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 2\sigma\upsilon\nu x + 1$$

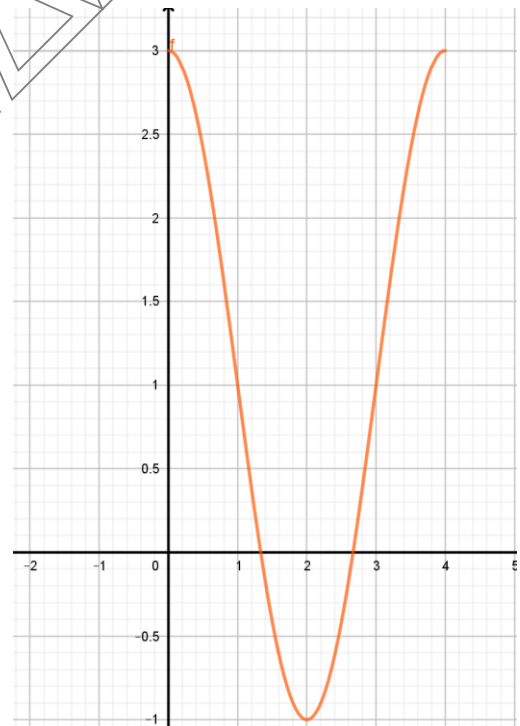
Γ2. Για $x \in \mathbb{R}$, $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}x \in [-1, 1]$ τότε $2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}x \in [-2, 2]$

$$\text{άρα } g(x) = 2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}x + 1 \in [-1, 3]$$

άρα έχει ελάχιστο το -1, μέγιστο το 3 και περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$

Γ3. Κατασκευάζουμε ένα πίνακα τιμών

x	0	1	2	3	4
y	3	1	-1	1	3



- Γ4.** $2\sin\frac{\pi}{2}x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin\frac{\pi}{2}x = -1/2 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \sin\frac{\pi}{2}x = \sin(\pi - \pi/3) \Leftrightarrow \frac{\pi}{2}x = 2k\pi \pm 2\pi/3 \Leftrightarrow x = 4k \pm 4/3 \quad k \in \mathbb{Z}$
 $0 < x < 4 \Rightarrow 0 < 4k + 4/3 < 4 \Rightarrow -4/3 < 4k < 8/3 \Rightarrow -1/3 < k < 2/3$ οπότε $k=0$ όμοια
 $0 < x < 4 \Rightarrow 0 < 4k - 4/3 < 4 \Rightarrow 4/3 < 4k < 16/3 \Rightarrow 1/3 < k < 4/3$ οπότε $k=1$
 Για $k=0$ ο τύπος με το + δίνει $x=4/3$. Για $k=1$ ο τύπος με το - δίνει $x=8/3$

ΘΕΜΑ Δ

- Δ1.** $0 < f(x) < 1 \Leftrightarrow 0 < \log 2^{x+1} + 8 - 2\log 2 < 1 \Leftrightarrow$
 $\log 1 < \log 2^{x+1} + 8 - \log 2^2 < \log 10 \Leftrightarrow$
 $\log 1 < \log \frac{2^{x+1} + 8}{4} < \log 10 \xrightarrow{\log x} 1 < \frac{2^{x+1} + 8}{4} < 10$
 $\Leftrightarrow 4 < 2^{x+1} + 8 < 40 \Leftrightarrow -4 < 2^{x+1} < 32 \Leftrightarrow$
 (η πρώτη ανίσωση αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$) $2^{x+1} < 2^5 \xrightarrow{2^x} x+1 < 5 \Leftrightarrow x < 4$

- Δ2** Το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ακέραιους συντελεστές αφού οι α, β είναι ακέραιοι. Ο α , ως ακέραια ρίζα του πολυωνύμου P , ανήκει στο σύνολο των διαιρετών του σταθερού όρου 3. Δηλαδή είναι ένας από τους $-1, 1, -3, 3$. Σε κάθε περίπτωση $\alpha < 4$. Επομένως, από το Δ1, προκύπτει ότι $0 < f(\alpha) < 1$. Έτσι έχουμε: $f(\alpha)^{5\beta-24} < f(\alpha)^{\beta(\beta-5)}$

$\xrightarrow{(f(\alpha))^x} 5\beta-24 > \beta(\beta-5) \Leftrightarrow \beta^2 - 10\beta + 24 < 0$ και από τον κανόνα προσήμου τριωνύμου προκύπτει $4 < \beta < 6$, οπότε αφού ο β είναι ακέραιος έπεται ότι $\beta=5$.

Για $\beta=5$ και αφού ο α είναι ρίζα του πολυωνύμου P έχουμε:

$$P(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2\alpha^3 + 5\alpha^2 - 4\alpha^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow 2\alpha^3 + \alpha^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow (\text{σχήμα Horner στη θέση 1})$$

$$(\alpha - 1)(2\alpha^2 + 3\alpha + 3) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1 \quad (2\alpha^2 + 3\alpha + 3 = 0 \text{ αδύνατη})$$

Δ3. $P(x) < 0 \Leftrightarrow 2x^3 + 5x^2 - 4x - 3 < 0 \Leftrightarrow$ (σχήμα Horner στη θέση 1)

$(x-1)(2x^2 + 7x + 3) < 0$

x	$-\infty$	-3	-1/2	1	$+\infty$
x-1	-	0	-	0	+
$2x^2 + 7x + 3$	+	0	-	0	+
P(x)	-	0	+	0	+

Επομένως $x \in -\infty, -3 \cup \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$

Δ4. Για $x \in 0, \pi$ είναι $\eta\mu x \in 0, 1$. Από τον πίνακα του Δ3 προκύπτει ότι

$P(\eta\mu x) \leq 0$ (2).

Επίσης από το Δ1, προκύπτει ότι για $\eta\mu x \leq 1 < 4$ είναι $f(\eta\mu x) \leq 1$ (3)

Με πρόσθεση κατά μέλη των (2) και (3) προκύπτει $P(\eta\mu x) + f(\eta\mu x) \leq 1$.