ΤΑΞΗ: **Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: **ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ**
ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Ημερομηνία: Τετάρτη 20 Απριλίου 2022
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη εφαπτομένης κύκλου, σχολικό βιβλίο, σελίδα 83.

Α2. Ορισμός παραβολής, σχολικό βιβλίο, σελίδα 89.

Α3. α) Λάθος.

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ γνωρίζουμε ότι $x^2 \geq 0$ οπότε από την εξίσωση της παραβολής $x^2 = 2\rho y$ προκύπτει $2\rho y \geq 0$. Εφόσον $\rho < 0$ και $y \neq 0$ πρέπει $y < 0$ άρα τα σημεία $M(x, y), y < 0$ της παραβολής θα βρίσκονται στα 3º, 4º τεταρτημόριο και όχι στα 1º, 2º του καρτεσιανού συστήματος αξόνων xOy.

Α4. 1. Σωστό

2. Λάθος

3. Λάθος

4. Σωστό

5. Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. α) Έχουμε $\vec{\alpha}\cdot(\vec{\alpha}+2\vec{\beta})=-3 \Leftrightarrow \vec{\alpha}^2+2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-3 \Leftrightarrow$

$|\vec{\alpha}|^2+2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-3 \Leftrightarrow 3+2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-3 \Leftrightarrow 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-6 \Leftrightarrow$

$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-3.$

Για το $|\vec{\beta}|$ έχουμε: $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-3 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\sigma\upsilon\nu 120^o=-3 \Leftrightarrow$

$\sqrt{3}\cdot|\vec{\beta}|\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-3 \Leftrightarrow |\vec{\beta}|=\frac{6}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow |\vec{\beta}|=2\sqrt{3}.$

β) Αντικαθιστώντας στην εξίσωση της παραβολής παίρνουμε:

$y^2=-4\vec{\alpha}\vec{\beta}\cdot x$ ή $y^2=12\cdot x$ οπότε $2p=12 \Leftrightarrow p=6.$

Άρα $E\left(\frac{p}{2},0\right)=(3,0)$ και η διευθετούσα $\delta: x=-\frac{p}{2} \Leftrightarrow x=-3.$

Β2. Η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής στο $A(1,2\sqrt{3})$ είναι

$y\cdot y_1=p(x+x_1)$ ή $y\cdot 2\sqrt{3}=6\cdot(x+1) \Leftrightarrow y=\frac{3}{\sqrt{3}}(x+1)$

$\Leftrightarrow y=\sqrt{3}x+\sqrt{3}.$

Ο συντελεστής διεύθυνσής της είναι $\lambda=\sqrt{3}$ οπότε, αν ω η γωνία που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ θα έχουμε $\varepsilon\varphi\omega=\sqrt{3}$ και $\omega=60^o$.

Β3. Για $y=0$ έχουμε $0=\sqrt{3}\cdot x+\sqrt{3} \Leftrightarrow x=-1$. Άρα $B(-1,0)$.

Ακόμη $A(1,2\sqrt{3})$ και $E(3,0)$ οπότε:

$$(AB)=\sqrt{(1+1)^2+\left(2\sqrt{3}-0\right)^2}=\sqrt{4+12}=4$$

$$(AE)=\sqrt{(3-1)^2+\left(2\sqrt{3}-0\right)^2}=\sqrt{4+12}=4$$

$$(BE)=\sqrt{(3+1)^2+0}=4$$

Αφού (AB)=(AE)=(BE) το τρίγωνο AEB είναι ισόπλευρο.

Β4. Η ευθεία ΟΑ διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ και το σημείο $A(1, 2\sqrt{3})$ άρα $y = a \cdot x$ ή $2\sqrt{3} = \alpha \cdot 1 \Leftrightarrow \alpha = 2\sqrt{3}$.

Άρα (OA): $y = 2\sqrt{3} \cdot x$.

Για το σημείο Γ: $\begin{cases} y = 2\sqrt{3} \cdot x \\ x = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -6\sqrt{3} \end{cases}$ Άρα $\Gamma(-3, -6\sqrt{3})$ και

$$\lambda_{\Gamma E} = \frac{y_E - y_\Gamma}{x_E - x_\Gamma} = \frac{-6\sqrt{3} - 0}{3 - (-3)} = \sqrt{3}.$$

Επειδή $\lambda_\varepsilon = \sqrt{3}$ έχουμε $(\varepsilon) // \Gamma E$.

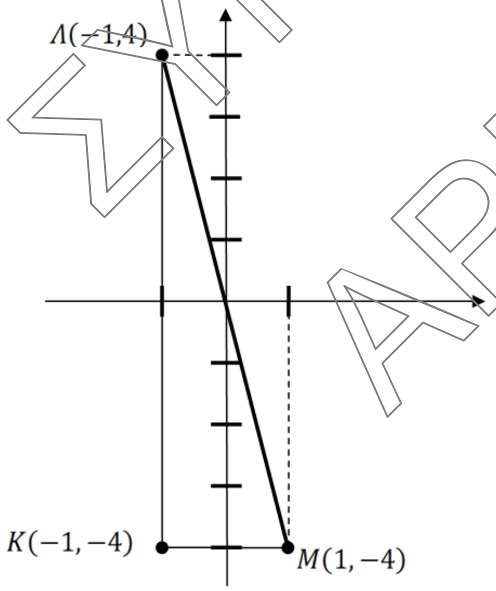
ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για το σημείο K: $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 2x + y = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = -5 \\ y = 3x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -4 \end{cases}$.

Άρα $K(-1, -4)$, οπότε $\Lambda(-1,4)$ και $M(1, -4)$.

Για την εξίσωση της ευθείας ΛM: $\lambda_{\Lambda M} = \frac{-4-4}{1-(-1)} = -4$ οπότε

$y - 4 = -4 \cdot (x + 1) \Leftrightarrow y = -4x$.



$$E = \frac{1}{2} \cdot \beta \cdot \upsilon = \frac{1}{2} \cdot (KM) \cdot (K\Lambda) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 8 = 8\ \tau\mu.$$

(Εναλλακτικά $E = \frac{1}{2}\left|det\left(\overrightarrow{KM}, \overrightarrow{K\Lambda}\right)\right| = \cdots = 8\ \tau\mu.$)

Γ2. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\delta}_1 = (-1,-3), \vec{\delta}_2 = (1,-2)$ παράλληλα προς τις ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ αντίστοιχα. Η οξεία γωνία φ των ευθειών ε_1 και ε_2 είναι ίση ή παραπληρωματική της γωνίας των διανυσμάτων $\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2$ οπότε :

$$\vec{\delta}_1 \cdot \vec{\delta}_2 = |\vec{\delta}_1| \cdot |\vec{\delta}_2| \cdot \sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2}) \Leftrightarrow$$

$$-1 + 6 = \sqrt{10} \cdot \sqrt{5} \cdot \sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2}) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2}) = \frac{5}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{5}} \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \hat{\varphi} = 45^o.$$

Γ3. Για $y = 0$ στην ε_2: $2x + 0 + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -3$

Άρα $\Gamma(-3,0)$.

Έστω $A(x_0, y_0)$ ζητούμενο σημείο. Αφού Α σημείο της ε_1 θα ισχύει

$3x_0 - y_0 = 1$ (1)

Επίσης τα σημεία Γ, Λ, A είναι συνευθειακά $\Leftrightarrow \overrightarrow{\Gamma\Lambda} // \overrightarrow{\Gamma A} \Leftrightarrow det(\overrightarrow{\Gamma\Lambda}, \overrightarrow{\Gamma A}) = 0$

Όμως $\overrightarrow{\Gamma\Lambda} = (-1-(-3), 4-0) = (2,4)$ και

$\overrightarrow{\Gamma A} = (x_0 + 3, y_0 - 0) = (x_0 + 3, y_0)$

Άρα $det(\overrightarrow{\Gamma\Lambda}, \overrightarrow{\Gamma A}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ x_0 + 3 & y_0 \end{vmatrix} = 0$

$$\Leftrightarrow 2y_0 - 4x_0 - 12 = 0 \Leftrightarrow$$

$$-2x_0 + y_0 = 6 \ (2)$$

Οι (1) και (2) δίνουν : $\begin{cases} 3x_0 - y_0 = 1 \\ -2x_0 + y_0 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 7 \\ y_0 = 20 \end{cases}$

Άρα $A(7,20)$.

Γ4. Το $M(x,y)$ είναι σημείο της ε_1 ή $\varepsilon_2 \Leftrightarrow$

$3x-y-1=0$ ή $2x+y+6=0 \Leftrightarrow$

$(3x-y-1)\cdot(2x+y+6)=0 \Leftrightarrow$

$6x^2+3xy+18x-2xy-y^2-6y-2x-y-6=0 \Leftrightarrow$

$6x^2-y^2+xy+16x-7y-6=0.$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $x^2+y^2+(\lambda+6)x+(3\lambda+4)y+3-\lambda=0$ (1)

Έχουμε $A=\lambda+6, B=3\lambda+4, \Gamma=3-\lambda$ και

$A^2+B^2-4\Gamma=(\lambda+6)^2+(3\lambda+4)^2-4(3-\lambda)=$

$=\lambda^2+12\lambda+36+9\lambda^2+24\lambda+16-12+4\lambda=$

$=10\lambda^2+40\lambda+40=10(\lambda^2+4\lambda+4)=10(\lambda+2)^2$

Για $\lambda\neq-2$ είναι $A^2+B^2-4\Gamma>0$ άρα για $\lambda\neq-2$ παριστάνει κύκλο

με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)=\left(-\frac{\lambda+6}{2},-\frac{3\lambda+4}{2}\right)$ και ακτίνα

$$\rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}=\frac{\sqrt{10(\lambda+2)^2}}{2}=\frac{\sqrt{10}\cdot|\lambda+2|}{2}$$

Θέτοντας στην (1): $x=-2$ και $y=1$ έχουμε

$(-2)^2+1^2+(\lambda+6)(-2)+(3\lambda+4)\cdot1+3-\lambda=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5-\cancel{2\lambda}-12+\cancel{3\lambda}+4+3-\cancel{\lambda}=0 \Leftrightarrow 0=0$

Άρα το σημείο $A(-2,1)$ είναι κοινό σημείο των κύκλων (1).

Δ2. Τα κέντρα των κύκλων είναι $K\left(-\frac{\lambda+6}{2},-\frac{3\lambda+4}{2}\right),\ \lambda\neq-2.$

Έχουμε $x=-\frac{\lambda+6}{2}$ και $y=-\frac{3\lambda+4}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x=-\lambda-6\\ y=-\dfrac{3\lambda+4}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda=-2x-6\\ y=-\dfrac{3(-2x-6)+4}{2}\end{cases}$$

Άρα $y=-\frac{-6x-18+4}{2}$ ή $y=3x+7$.

Όμως $\lambda \neq -2$ άρα $-2x - 6 \neq -2 \Leftrightarrow -2x \neq 4 \Leftrightarrow x \neq -2$.

Για $x = -2$ παίρνουμε $y = 3(-2) + 7 \Leftrightarrow y = 1$.

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων είναι τα σημεία της ευθείας $y = 3x + 7$ εκτός του σημείου της $A(-2,1)$.

Δ3. Η ευθεία (ζ) εφάπτεται σε κύκλο που ορίζει η (1)$\Leftrightarrow d(K,\zeta) = \rho$ (2).

$$\zeta: y = -\frac{1}{3}x + 7 \Leftrightarrow 3y = -x + 21 \Leftrightarrow x + 3y - 21 = 0$$

Το $K\left(-\frac{\lambda+6}{2}, -\frac{3\lambda+4}{2}\right),\ \rho = \frac{\sqrt{10}\cdot|\lambda+2|}{2}$ οπότε

$$(2) \Leftrightarrow \frac{\left|-\frac{\lambda+6}{2}+3\left(-\frac{3\lambda+4}{2}\right)-21\right|}{\sqrt{1^2+3^2}} = \frac{\sqrt{10}|\lambda+2|}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left|\frac{-\lambda-6-9\lambda-12-42}{2}\right|}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}\cdot|\lambda+2|}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{|-10\lambda-60|}{2\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}|\lambda+2|}{2} \Leftrightarrow 10|\lambda+6| = 10|\lambda+2| \Leftrightarrow$$

$\lambda + 6 = \lambda + 2$ ή $\lambda + 6 = -\lambda - 2 \Leftrightarrow$ αδύνατη ή $\lambda = -4$.

Για $\lambda = -4$ έχουμε $C_1: x^2 + y^2 + 2x - 8y + 7 = 0$ με $K(-1,4)$ και $\rho = \sqrt{10}$.

Δ4. Έστω $M(\alpha, 0)$ σημείο του $x'x$ άξονα. Η μέγιστη απόσταση του Μ από σημείο του C_1 είναι

$$dmax = (KM) + \rho = \sqrt{(\alpha+1)^2 + (4-0)^2} + \sqrt{10} =$$

$$\sqrt{(\alpha+1)^2 + 16} + \sqrt{10}$$

Οπότε $dmax > 5 + \sqrt{10} \Leftrightarrow \sqrt{(\alpha+1)^2 + 16} + \sqrt{10} > 5 + \sqrt{10}$

$\Leftrightarrow (\alpha+1)^2 + 16 > 25 \Leftrightarrow (\alpha+1)^2 > 9 \Leftrightarrow |\alpha+1| > 3$

$\Leftrightarrow \alpha + 1 > 3$ ή $\alpha + 1 < -3 \Leftrightarrow \alpha > 2$ ή $\alpha < -4$

Άρα τα σημεία $M(\alpha, 0)$ του $x'x$ άξονα θα έχουν τετμημένη

$\alpha \in (-\infty, -4) \cup (2, +\infty)$.