



ΤΑΞΗ: Α' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Ημερομηνία: Σάββατο 14 Μαΐου 2022

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σελίδα 68 σχολικού βιβλίου

Α2. α) Λάθος

β) Σωστό

γ) Λάθος

δ) Σωστό

ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1.

Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle A\Delta B$ και $\triangle A'\Delta'B'$

- $\hat{A}\Delta B = \hat{A}'\Delta'B' = 90^\circ$
- $A\Delta = A'\Delta'$ (υπόθεση)
- $AB = A'B'$ (υπόθεση)

Από το κριτήριο ισότητας ορθογωνίων τριγώνων (δύο ομόλογες πλευρές ίσες) τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε $\hat{B} = \hat{B}'$

B2.

Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$

- $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{B}'\hat{A}'\hat{\Gamma}' = 90^\circ$
- $AB = A'B'$ (υπόθεση)
- $\hat{B} = \hat{B}'$ (από την 1^η σύγκριση)

Από το κριτήριο ισότητας ορθογωνίων τριγώνων (μία πλευρά και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία) τα τρίγωνα είναι ίσα.

ΘΕΜΑ Γ**Γ1.**

Επειδή Ax εξωτερική διχοτόμος ισχύει ότι $y\hat{A}x = x\hat{A}\hat{\Gamma}$

Επειδή $Ax \parallel B\Gamma$ έχουμε $y\hat{A}x = \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$ ως εντός εκτός και επί ταύτα.

ακόμα $x\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{A}\hat{\Gamma}\hat{B}$ ως εντός εναλλάξ.

Επειδή $y\hat{A}x = x\hat{A}\hat{\Gamma}$ έχουμε $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = \hat{A}\hat{\Gamma}\hat{B}$ άρα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

Γ2.

Στο τετράπλευρο $A\Delta\Gamma B$ οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες συνεπώς είναι παραλληλόγραμμο άρα $A\Delta = B\Gamma$

Ακόμα στο τετράπλευρο $Z\Lambda\Gamma B$ οι διαγώνιες διχοτομούνται συνεπώς είναι παραλληλόγραμμο άρα $Z\Lambda = B\Gamma$

Οπότε $A\Delta = AZ$

Γ3.

Έχουμε $A\Delta \parallel B\Gamma$ διότι $A\Delta\Gamma B$ παραλληλόγραμμο.

Έχουμε $AZ \parallel B\Gamma$ διότι $Z\Lambda\Gamma B$ παραλληλόγραμμο.

Άρα $A\Delta \parallel AZ$ από όπου προκύπτει ότι τα σημεία Z , A και Δ είναι συνευθειακά. (Ευκλείδειο αίτημα)

Γ4.

Έχουμε $Z\Delta // B\Gamma$ από προηγούμενο ερώτημα οπότε το τετράπλευρο $Z\Delta\Gamma B$ είναι τραπέζιο.

Έχουμε $ZB = A\Gamma$ διότι $Z\Delta\Gamma B$ παραλληλόγραμμο.

Έχουμε $\Delta\Gamma = AB$ διότι $A\Delta\Gamma B$ παραλληλόγραμμο.

Ακόμα $AB = A\Gamma$ διότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

Άρα $ZB = \Delta\Gamma$ δηλαδή οι μη παράλληλες πλευρές είναι ίσες, συνεπώς $Z\Delta\Gamma B$ ισοσκελές τραπέζιο.

ΘΕΜΑ Δ**Δ1.**

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta M$ έχουμε ότι $\hat{\Delta A M} = 30^\circ$ και $\hat{A M \Delta} = 90^\circ$ άρα $\hat{A \Delta M} = 60^\circ$.

Η $B\Delta$ ως διαγώνιος του ρόμβου $AB\Gamma\Delta$ διχοτομεί την γωνία $\hat{A \Delta M}$ συνεπώς $\hat{\Theta A M} = 30^\circ$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Theta\Delta M$ η γωνία $\hat{\Theta A M} = 30^\circ$ άρα $\Theta M = \frac{\Theta\Delta}{2}$.

Δ2.

Το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο άρα $B\Delta$ και $A\Gamma$ διχοτομούνται

Το $A\Delta\Gamma M$ είναι ορθογώνιο άρα ΔM και $A\Gamma$ διχοτομούνται

άρα οι διαγώνιες $A\Gamma$, ΔB και ΔM συντρέχουν.

Δ3.

Το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές με την γωνία $\hat{A \Delta \Gamma} = 60^\circ$ άρα είναι ισόπλευρο.

Συνεπώς AM και ΔO διάμεσοι οπότε το Θ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου.

Άρα έχουμε $\Delta\Theta = \frac{2}{3}\Delta O$ και $\Theta O = \frac{1}{3}\Delta O$

Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με την γωνία $\hat{A B \Gamma} = 60^\circ$ άρα είναι ισόπλευρο.

Συνεπώς $\Gamma\Lambda$ και ΒΟ διάμεσοι οπότε το Κ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου.

$$\text{Άρα έχουμε } \text{ΒΚ} = \frac{2}{3}\text{ΒΟ} \text{ και } \text{ΚΟ} = \frac{1}{3}\text{ΒΟ}$$

Όμως $\Delta\text{Ο} = \text{ΒΟ}$, οπότε έχουμε

$$\Delta\Theta = \frac{2}{3}\Delta\text{Ο}$$

$$\Theta\text{Κ} = \Theta\text{Ο} + \text{ΟΚ} = \frac{1}{3}\Delta\text{Ο} + \frac{1}{3}\Delta\text{Ο} = \frac{2}{3}\Delta\text{Ο}$$

$$\text{ΒΚ} = \frac{2}{3}\Delta\text{Ο}$$

Συνεπώς ισχύει $\Delta\Theta = \Theta\text{Κ} = \text{ΚΒ}$

Δ4.

Το τρίγωνο ΑΚΒ είναι ισοσκελές διότι η ΚΛ είναι ύψος και διάμεσος συνεπώς

$$\text{ΑΚ} = \text{ΚΒ} \text{ όμως } \text{ΒΚ} = \frac{1}{3}\Delta\text{Β} \text{ διότι } \Delta\Theta = \Theta\text{Κ} = \text{ΚΒ}$$

$$\text{Άρα } \text{ΑΚ} = \frac{1}{3}\Delta\text{Β}$$

Εναλλακτικά

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Theta\text{ΑΒ}$ η ΑΚ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, συνεπώς

$$\text{ΑΚ} = \frac{1}{2}\text{ΒΘ} = \text{ΑΚ} = \frac{1}{2}\text{ΒΘ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\Delta\text{Β} = \frac{1}{3}\Delta\text{Β}$$