ΤΑΞΗ: Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ

Ημερομηνία: Σάββατο 7 Μαΐου 2022
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σχολικό σελίδα 90

Α2.

i) Λάθος
ii) Σωστό
iii) Λάθος
iv) Σωστό
v) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$$A=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}-\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}=$$

$$\frac{\sqrt{6}+\left(\sqrt{2}\right)^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}-\frac{\sqrt{6}-\left(\sqrt{2}\right)^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}+2}{3-2}-\frac{\sqrt{6}-2}{3-2}=\sqrt{6}+2-\left(\sqrt{6}-2\right)=$$

$$\sqrt{6}+2-\sqrt{6}+2=4$$

$$B=\sqrt{2+\sqrt[4]{13+\sqrt[3]{27}}}=\sqrt{2+\sqrt[4]{13+3}}=\sqrt{2+\sqrt[4]{16}}=\sqrt{2+2}=\sqrt{4}=2$$

Β2.

$$\frac{|3-x|-2}{4}-\frac{|2x-6|-3}{2}>-2 \Leftrightarrow \frac{|-(x-3)|-2}{4}-\frac{|2(x-3)|-3}{2}>-2$$
$$\Leftrightarrow \frac{|x-3|-2}{4}-\frac{2|x-3|-3}{2}>-2 \Leftrightarrow^{\cdot 4}$$
$$4\cdot\frac{|x-3|-2}{4}-4\cdot\frac{2|x-3|-3}{2}>4\cdot(-2)\Leftrightarrow\Leftrightarrow |x-3|-2-2\cdot(2|x-3|-3)$$
$$>-8 \Leftrightarrow |x-3|-2-4|x-3|+6>-8 \Leftrightarrow |x-3|-4|x-3|$$
$$>-8-6+2 \Leftrightarrow -3|x-3|>-12 \Leftrightarrow$$

$\frac{-3|x-3|}{-3}<\frac{-12}{-3} \Leftrightarrow |x-3|<4 \Leftrightarrow -4<x-3<4 \Leftrightarrow -4+3<x<4+3 \Leftrightarrow -1<$ $x<7$οπότε $x\in(-1,7)$.

Β3.

Οι ακέραιοι αριθμοί όταν το $x\in(-1,7)$ είναι 0,1,2,3,4,5,6.Από αυτούς μη μηδενικά πολλαπλάσια του αριθμού 3 είναι το 3 και το 6.Οπότε $\alpha_1=3$ και $\alpha_2=6$.Η γεωμετρική πρόοδος έχει πρώτο όρο $\alpha_1=3$ και λόγο $\lambda=\frac{\alpha_2}{\alpha_1}=2$.Είναι

$$\alpha_6=\alpha_1\cdot\lambda^{6-1}=3\cdot 2^5=3\cdot 32=96$$

Β4.

Το $x\in(-1,7)$ έτσι έχουμε:

- $-1<x<7 \overset{+4}{\Leftrightarrow} 4-1<x+4<7+4 \Leftrightarrow 3<x+4<11$ οπότε $x+4>3 \Rightarrow x+4>0$

  άρα $|x+4|=x+4$

- $-1<x<7 \overset{-8}{\Leftrightarrow} -8-1<x-8<-8+7 \Leftrightarrow -9<x-8<-1$ οπότε $x-8<0$ άρα

  $|x-8|=-x+8$

$\Gamma=|x+4|-2|x-8|=x+4-2(-x+8)=x+4+2x-16=3x-12$.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-\alpha x+\beta}{|x+1|-2}$

Γ1.

$(\alpha-1)^4-81=0 \Leftrightarrow (\alpha-1)^4=81 \Leftrightarrow \alpha-1=\pm\sqrt[4]{81} \Leftrightarrow \alpha-1=\pm 3 \Leftrightarrow$
$\alpha-1=3$ ή $\alpha-1=-3 \Leftrightarrow \alpha=4$ ή $\alpha=-2$

Οπότε α=4

Γ2.

Έχουμε $f(x)=\dfrac{x^2-4x+\beta}{|x+1|-2}$ και αφού η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το $A(-1,-4)$, τότε:

$$f(-1)=-4 \Leftrightarrow \frac{(-1)^2-4(-1)+\beta}{|-1+1|-2}=-4 \Leftrightarrow \frac{1+4+\beta}{-2}=-4 \Leftrightarrow$$

$5+\beta=8 \Leftrightarrow \beta=3$.

Γ3.

Η $f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{|x+1|-2}$ για να ορίζεται πρέπει, $|x+1|-2\neq 0 \Leftrightarrow$
$|x+1|\neq 2 \Leftrightarrow x+1\neq 2 \;\kappa\alpha\iota\; x+1\neq -2 \Leftrightarrow x\neq 1 \;\kappa\alpha\iota\; x\neq -3$. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι $D_f=(-\infty,-3)\cup(-3,1)\cup(1,+\infty)$

Έχουμε $x>1 \Leftrightarrow x+1>2$ άρα $x+1>0$ οπότε $|x+1|=x+1$

Έχουμε $f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{|x+1|-2}=\dfrac{x^2-4x+3}{x+1-2}=\dfrac{(x-3)(x-1)}{x-1}=x-3$

Γ4.

Είναι $f(5)=5-3=2$ και $f(6)=6-3=3$.Η ανίσωση γίνεται: $2x^2-3x+1\leq 0$.

$\Delta=(-3)^2-4\cdot 2\cdot 1=9-8=1$, $x_{1,2}=\dfrac{3\pm 1}{4}=\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=\dfrac{1}{2}\end{cases}$

Τιμές x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$2x^2-3x+1$		+	0	-	0	+	

Από τον πίνακα προσήμου βλέπουμε ότι $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Για να έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες πρέπει η διακρίνουσα

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow \left[-(2\lambda-1)\right]^2 - 4\cdot 1\cdot \lambda(\lambda-2) > 0 \Leftrightarrow 4\lambda^2 - 4\lambda + 1 - 4\lambda^2 + 8\lambda > 0 \Leftrightarrow$$

$$4\lambda + 1 > 0 \Leftrightarrow \lambda > -\frac{1}{4}$$

Δ2.

Για λ=1 η εξίσωση γίνεται $x^2 - x - 1 = 0$

α) $S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-1}{1} = 1$, $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{-1}{1} = -1$ και

$$A = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2}{x_1x_2} + \frac{x_1}{x_1x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1x_2} = \frac{1}{-1} = -1$$

.

β) Να βρείτε την εξίσωση 2ου βαθμού που έχει για λύσεις τους αριθμούς $\rho_1 = x_1 + \frac{1}{x_1}$, $\rho_2 = x_2 + \frac{1}{x_2}$

Έχουμε $\rho_1+\rho_2=x_1+\frac{1}{x_1}+x_2+\frac{1}{x_2}=\left(x_1+x_2\right)+\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)=1-1=0$ και

$$\rho_1\cdot\rho_2=\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)=x_1x_2+\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}+\frac{1}{x_1x_2}=$$

$$=x_1x_2+\frac{(x_1)^2+(x_2)^2}{x_1x_2}+\frac{1}{x_1x_2}=x_1x_2+\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}+\frac{1}{x_1x_2}=$$

$$=-1+\frac{1^2-2(-1)}{-1}+\frac{1}{-1}=-1-3-1=-5$$

Οπότε η εξίσωση 2[ου] βαθμού που έχει για λύσεις τους αριθμούς $\rho_1=x_1+\frac{1}{x_1}$ και $\rho_2=x_2+\frac{1}{x_2}$ είναι η $x^2-(\rho_1+\rho_2)x+(\rho_1\cdot\rho_2)=0\Leftrightarrow x^2-5=0$

Δ3.

Για να αληθεύει για κάθε $x\in R$ πρέπει η διακρίνουσα $\Delta<0\Leftrightarrow\left[-\left(2\lambda-1\right)\right]^2-4\cdot1\cdot\lambda\left(\lambda-2\right)<0\Leftrightarrow4\lambda^2-4\lambda+1-4\lambda^2+8\lambda<0\Leftrightarrow$

$4\lambda+1<0\Leftrightarrow\lambda<-\frac{1}{4}$