



2022 | Απρίλιος | Φάση 3 | Διαγωνίσματα Επανάληψης

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ' Γενικού Λυκείου

Θετικών Σπουδών & Σπουδών Υγείας / Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής

Μ. Τετάρτη 20 Απριλίου 2022 | Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Να αποδείξετε ότι αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε διάστημα $[α,β]$ και G είναι μία αρχική συνάρτηση της f , τότε ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = G(\beta) - G(\alpha)$.
Μονάδες 7
- A2.** Να δώσετε τον ορισμό του σημείου καμπής.
Μονάδες 4
- A3.** Δίνεται η παρακάτω πρόταση:
«Αν μία συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη σε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε δεν είναι ούτε συνεχής στο σημείο αυτό.»
- α)** Να εξετάσετε αν η πρόταση είναι **Αληθής** ή **Ψευδής**. **Μονάδες 1**
- β)** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **Μονάδες 3**
- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- α)** Αν για τις συναρτήσεις f, g ισχύει ότι $f(x) < g(x)$ κοντά στο σημείο x_0 και υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$, τότε ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.
Μονάδες 2



2022 | Απρίλιος | Φάση 3 | Διαγωνίσματα Επανάληψης

β) Αν μία συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε διάστημα $\Delta = (\alpha, \beta)$, τότε το σύνολο τιμών της είναι $f(\Delta) = \left(\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x), \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) \right)$.

Μονάδες 2

γ) Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε διάστημα Δ , τότε τα εσωτερικά σημεία του Δ που δεν είναι ρίζες της f' , δεν είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων της f .

Μονάδες 2

δ) Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού $n \geq 2$ δεν έχει ασύμπτωτες.

Μονάδες 2

ε) Αν $\alpha < \beta$ και ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$, τότε $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε την συνάρτηση f με πεδίο ορισμού $A = \mathbb{R}$ και την συνάρτηση $g(x) = \ln x + 1$,

$x > 0$ και ισχύει $(f \circ g)(x) = \frac{\ln(e \cdot x)}{e^{-x}}$, για κάθε $x > 0$.

B1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = x \cdot e^{-x}$ και να ορίσετε την συνάρτηση $g \circ f$.

Μονάδες 3+3

B2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα την κυρτότητα και να βρείτε σημεία καμψής.

Μονάδες 8

B3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες και να χαράξετε την γραφική παράσταση της f .

Μονάδες 3+3



2022 | Απρίλιος | Φάση 3 | Διαγωνίσματα Επανάληψης

B4. Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f που είναι κάθετη προς την ευθεία $y = -x$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , για την οποία ισχύουν $f'(x) = (e^x - 1) \cdot e^{-f(x)}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 0$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln(e^x - x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Έπειτα να δείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \neq 0$.

Μονάδες 3+2

Γ2. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(f(x) \cdot \eta\mu \left(\frac{1}{f(x)} + \frac{\eta\mu(f(x))}{f^2(x)} \right) \right)$

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$

Μονάδες 4+4

Γ3. Αν $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$ και $\alpha < \beta < \gamma$, τότε να αποδείξετε ότι υπάρχουν δύο ακριβώς ρίζες της εξίσωσης $\frac{f(\alpha)}{x-\alpha} + \frac{f(\beta)}{x-\beta} + \frac{f(\gamma)}{x-\gamma} = 0$ στο διάστημα (α, γ) .

Μονάδες 4

Γ4. Να αποδείξετε ότι:

α) Η εξίσωση $e^x = x + e$ έχει δύο ακριβώς ρίζες ρ_1, ρ_2 , με $\rho_1 < 0 < \rho_2$.

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{\rho_1}^{\rho_2} (e^x - 1) \cdot \sqrt{f(x)} dx$.

Μονάδες 4+4



2022 | Απρίλιος | Φάση 3 | Διαγωνίσματα Επανάληψης

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , για την οποία ισχύει $f'(x) > 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι ισχύει $\frac{f(x) - f(0)}{x} > 1$, για κάθε $x \neq 0$.

Μονάδες 6

Δ2. Δείξτε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1 και να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της αντίστροφης f^{-1} είναι το σύνολο \mathbb{R} .

Μονάδες 5

Δ3. Να αποδείξετε ότι:

α) Η εξίσωση $f(x) = -x$ έχει μοναδική ρίζα ρ .

β) Ισχύει ότι $0 < \lim_{x \rightarrow \rho} \frac{\eta\mu(x - \rho)}{f(x) + \rho} < 1$.

Μονάδες 3+4

Δ4. Αν για την ρίζα ρ του ερωτήματος **Δ3(α)** ισχύει $\rho > 0$ και x_0 είναι ρίζα της f τότε να δείξετε ότι αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ της γραφικής παράστασης της f του άξονα x' και του άξονα yy' και ισχύει ότι το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ της γραφικής παράστασης της f , της ευθείας $y = -x$ και του άξονα yy' είναι ίσο με το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ της γραφικής παράστασης της f , της ευθείας $y = -x$ και των ευθειών $x = \rho$ και $x = x_0$, τότε $E = \frac{x_0^2}{2}$.

Μονάδες 7

Να έχετε επιτυχία!