ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ' Γενικού Λυκείου

Θετικών Σπουδών & Σπουδών Υγείας / Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής

Μ. Τετάρτη 20 Απριλίου 2022 | Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία

Α2. Θεωρία

Α3. **α)** Ψευδής

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=|x|=\begin{cases} x & \text{αν } x\geq 0 \\ -x & \text{αν } x<0 \end{cases}$ για την οποία έχουμε ότι είναι συνεχής στο $x=0$ αφού $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=0$ αλλά η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$ αφού $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x}{x}=-1$ ενώ $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x}=1$.

Α4. **α)** Λάθος

β) Λάθος

γ) Σωστό

δ) Σωστό

ε) Λάθος

ΕΙΜΑΣΤΕ ΜΕΣΑ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Θέτω $g(x)=w \Leftrightarrow \ln x+1=w \Leftrightarrow \ln x=w-1 \Leftrightarrow x=e^{w-1}$

Ισχύει ότι

$$f\left(g(x)\right)=\frac{\ln(e\cdot x)}{e\cdot x} \underset{x=e^{w-1}}{\overset{g(x)=w}{\Longrightarrow}} f(w)=\frac{\ln\left(e\cdot e^{w-1}\right)}{e^{w}}=\frac{w}{e^{w}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f(w)=w\cdot e^{-w}, w\in\mathbb{R}$ άρα $f(x)=x\cdot e^{-x},\ x\in\mathbb{R}$

$$Dgof=\left\{x\in D_f\ /\ f(x)\in D_g\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}\ /\ x\cdot e^{x}\in(0,+\infty)\right\}=$$

$$=\left\{\begin{matrix} x\in\mathbb{R} \\ \text{και} \\ x\cdot e^{x}>0 \end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix} x\in\mathbb{R} \\ \text{και} \\ x>0 \end{matrix}\right\}=(0,+\infty)$$

$$(gof)(x)=g\left(f(x)\right)=\ln\left(x\cdot e^{-x}\right)+1=\ln x+\ln e^{-x}+1=\ln x-x+1,\ x>0.$$

Β2. f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=\left(x\cdot e^{-x}\right)'=e^{-x}-x\cdot e^{-x}\Rightarrow f'(x)=(1-x)\cdot e^{-x}$

Αν $f'(x)=0\Leftrightarrow(1-x)\cdot e^{-x}=0\Leftrightarrow 1-x=0\Leftrightarrow x=1$

Αν $f'(x)>0\Leftrightarrow(1-x)\cdot e^{-x}>0\Leftrightarrow 1-x>0\Leftrightarrow x<1$

Αν $f'(x)<0\Leftrightarrow(1-x)\cdot e^{-x}<0\Leftrightarrow 1-x<0\Leftrightarrow x>1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	ΟΜ	$\searrow$	

f γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$, f γνησίως φθίνουσα, στο $[1, +\infty)$ και παρουσιάζει για $x = 1$ Ο.Μ. ίσο με $f(1)=\frac{1}{e}$.

Συνεργαζόμενοι Εκπαιδευτικοί-Φροντιστές

ΕΙΜΑΣΤΕ ΜΕΣΑ

Ακόμα η f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη με

$$f''(x)=\left((1-x)\cdot e^{-x}\right)'=-e^{-x}-(1-x)\cdot e^{-x}=e^{-x}(x-2)$$

Αν $f''(x)=0 \Leftrightarrow e^{-x}(x-2)=0 \Leftrightarrow x=2$

Αν $f''(x)>0 \Leftrightarrow e^{-x}(x-2)>0 \Leftrightarrow x-2>0 \Leftrightarrow x>2$

Αν $f''(x)<0 \Leftrightarrow e^{-x}(x-2)<0 \Leftrightarrow x-2<0 \Leftrightarrow x<2$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	ΣΚ	↗	

f κοίλη στο $(-\infty, 2)$, κυρτή στο $(2, +\infty)$ και το σημείο $A(2, f(2))$, δηλ. το $A\left(2, \frac{2}{e^2}\right)$ είναι σημείο καμπής της f.

Β3. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Ακόμα έχουμε: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^x=0$

Άρα $\lambda = 0$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot e^{-x}\right)\overset{(+\infty)\cdot 0}{=\!=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}\underset{\text{DLH}}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=\!=\!=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{x'}{\left(e^x\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0,\ \text{ άρα } \beta=0.$$

Δηλαδή η $\psi = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Ακόμα έχουμε: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^x=+\infty$

ΕΙΜΑΣΤΕ ΜΕΣΑ

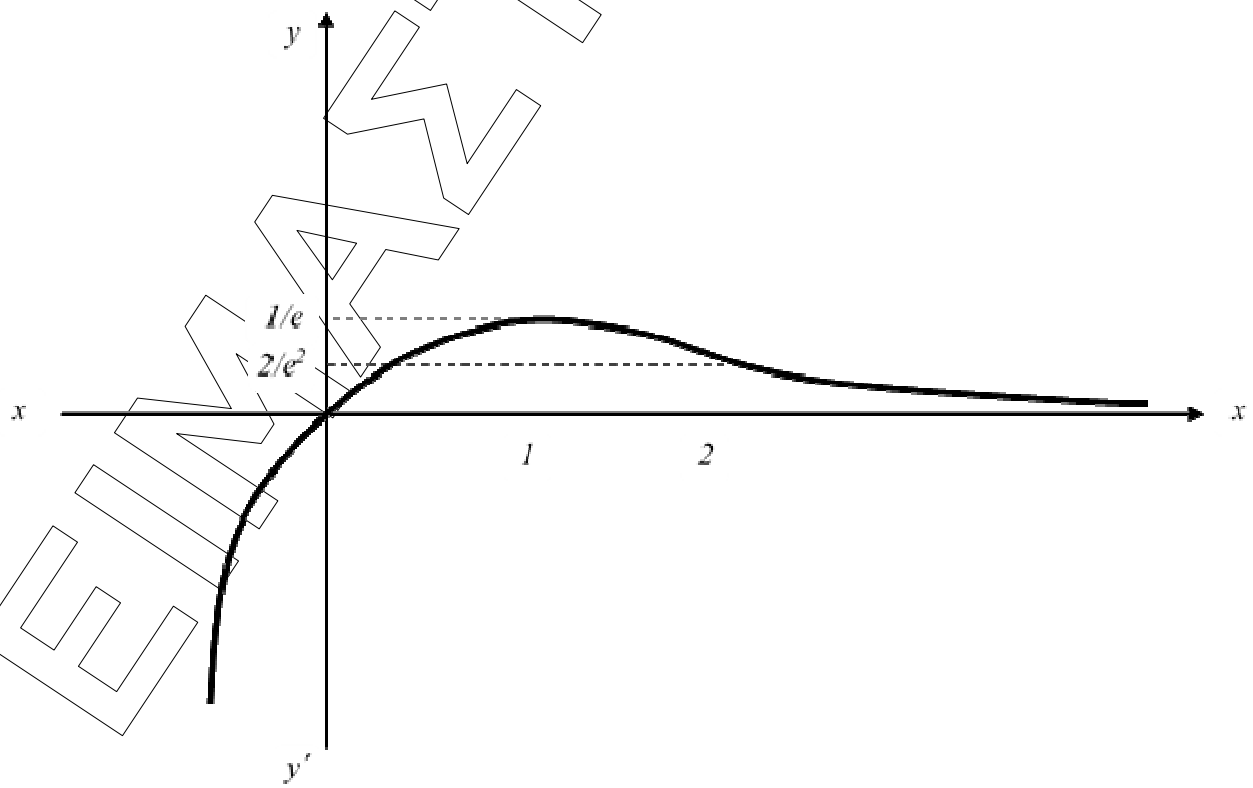
άρα η f δεν έχει ούτε πλάγια ούτε οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

<u>Σημεία τομής με xx'</u>

Θέτω $f(x)=0 \Leftrightarrow x\cdot e^{-x}=0 \Leftrightarrow x=0$

Άρα το $A(0,0)$ είναι κοινό σημείο με τον xx' και τον $\psi\psi'$.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−		−	
$f''(x)$		−		−	0	+	
$f(x)$			ΟΜ		ΣΚ		



ΕΙΜΑΣΤΕ ΜΕΣΑ

Β4. Θεωρούμε $M\left(x_0, f(x_0)\right)$ το σημείο στο οποίο η ζητούμενη εφαπτομένη (ε) εφάπτεται στην C_f.

Τότε έχουμε $\lambda_\varepsilon = f'(x_0) = e^{-x_0}(1-x_0)$

Αφού (ε) είναι κάθετη προς την $\psi = -x$ ισχύει ότι

$$\lambda_\varepsilon = 1 \Leftrightarrow e^{-x_0}(1-x_0) = 1 \Leftrightarrow \frac{1-x_0}{e^{x_0}} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 \cdot x_0 = e^{x_0} \Leftrightarrow e^{x_0} + x_0 - 1 = 0 \qquad (1)$$

Θεωρώ $h(x) = e^x + x - 1, \quad x \in \mathbb{R}$, και έχω ότι $h(0) = 0$ και

$h'(x) = e^x + 1 > 0 \Rightarrow h \uparrow$ στο $\mathbb{R} \Rightarrow h$ 1−1.

$(1) \Rightarrow h(x_0) = h(0) \Rightarrow x_0 = 0$

Άρα $(\varepsilon): \psi - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0)$ με $f(0) = 0$ και $f'(0) = 1$

Άρα (ε) : $\psi = x$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Ισχύει ότι $f'(x) = (e^x - 1) \cdot e^{-f(x)} \Leftrightarrow e^{f(x)} \cdot f'(x) = e^x - 1 \Leftrightarrow \left(e^{f(x)}\right)' = (e^x - x)'$ άρα από συνέπειες Θ.Μ.Τ. ισχύει $e^{f(x)} = e^x - x + c$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Για $x = 0$ έχουμε $e^{f(0)} = e^0 - 0 + c \Leftrightarrow 1 = 1 + c \Leftrightarrow c = 0$ με $e^x - x > 0$.

Άρα $e^{f(x)} = e^x - x \Leftrightarrow f(x) = \ln\left(e^x - x\right), x \in \mathbb{R}$.

Αν $f(x) > 0 \Leftrightarrow \ln\left(e^x - x\right) > 0 \Leftrightarrow e^x - x > 1 \Leftrightarrow e^x - x - 1 > 0$.

<u>1ος τρόπος</u>

Θεωρώ $g(x) = e^x - x - 1 \quad x \in \mathbb{R}$ και έχω: $g'(x) = e^x - 1$

ΕΙΜΑΣΤΕ ΜΕΣΑ

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	ΟΕ	$\nearrow$	

Αν $g'(x)=0 \Leftrightarrow e^x>1 \Leftrightarrow x>0$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow e^x=1 \Leftrightarrow x=0$

$g'(x)<0 \Leftrightarrow e^x<1 \Leftrightarrow x<0$

Άρα η g παρουσιάζει για $x = 0$ Ο.Ε. ίσο με $g(0) = 0$

Άρα αν $x \neq 0$ ισχύει $g(x)>0 \Leftrightarrow e^x-x>1 \Leftrightarrow \ln\left(e^x-x\right)>0 \Leftrightarrow f(x)>0$.

<u>2ος τρόπος</u>

Ισχύει από γνωστή εφαρμογή ότι $\ln x \le x-1$ για κάθε $x > 0$ με την ισότητα να ισχύει για $x = 1$ θέτω όπου x το e^x και έχω: $\ln e^x \le e^x-1 \Leftrightarrow x \le e^x-1 \Leftrightarrow e^x-x \ge 1$ με την ισότητα να ισχύει για $x = 0$.

Οπότε για κάθε $x \neq 0$ έχουμε $e^x-x>1 \Leftrightarrow \ln\left(e^x-x\right)>0 \Leftrightarrow f(x)>0$

Γ2. **α)** Θέτω $u=f(x)$ και έχω ότι αν $x \to 0$ τότε $f(x) \to 0$ με $f(x)>0$ για $x \neq 0$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)\cdot \eta\mu\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)\right)=\lim\limits_{u\to 0}\left(u\cdot \eta\mu\dfrac{1}{u}\right)=0$

αφού ισχύει ότι: $-1 \le \eta\mu\dfrac{1}{u} \le 1 \overset{u>0}{\Rightarrow} -u \le u\cdot \eta\mu\dfrac{1}{u} \le u$

και $\lim\limits_{u\to 0}(-u)=\lim\limits_{u\to 0}(u)=0$ οπότε από κριτήριο παρεμβολής ισχύει

$\lim\limits_{u\to 0}\left(u\cdot \eta\mu\dfrac{1}{u}\right)=0$

ΕΙΜΑΣΤΕ ΜΕΣΑ

Άρα $\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)\cdot \eta\mu\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)\right)=0$

Για το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu f(x)}{f^2(x)}$ θέτοντας $u=f(x)$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu f(x)}{f^2(x)}=\lim_{u\to 0^+}\frac{\eta\mu u}{u^2}=\lim_{u\to 0^+}\left[\frac{1}{u}\cdot\frac{\eta\mu u}{u}\right]=(+\infty)\cdot 1=+\infty$$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0}\left[f(x)\cdot \eta\mu\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)+\dfrac{\eta\mu f(x)}{f^2(x)}\right]=+\infty$

β) Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(e^x-x\right)-\ln e^x\right]=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(\frac{e^x-x}{e^x}\right)\right]\overset{(1)}{=\!=}\lim_{u\to 1}\ln u=\ln 1=0$$

(1) Θέτω $u=\dfrac{e^x-x}{e^x}=1-\dfrac{x}{e^x}$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{x}{e^x}\right)=1-\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=1-\lim_{x\to+\infty}\frac{1^{e^x}}{e^x}=1$$

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}\underset{\text{DLH}}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=\!=\!=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x'}{\left(e^x\right)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$.

Γ3. Η εξίσωση $\dfrac{f(\alpha)}{x-\alpha}+\dfrac{f(\beta)}{x-\beta}+\dfrac{f(\gamma)}{x-\gamma}=0$ γράφεται ισοδύναμα για $x\neq\alpha,\beta,\gamma$

$$f(\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)+f(\beta)(x-\alpha)(x-\gamma)+f(\gamma)(x-\alpha)(x-\beta)=0$$

όπου $f(\alpha),\ f(\beta),\ f(\gamma)>0$ αφού $f(x)>0\quad\forall x\neq 0$

Θεωρώ συνάρτηση h με τύπο:

$$h(x)=f(\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)+f(\beta)(x-\alpha)(x-\gamma)+f(\gamma)(x-\alpha)(x-\beta)$$

και έχουμε ότι:

h συνεχής στα [α, β] και [β, γ]

ΕΝΑΛΛΑΓΕ ΜΕΣΑ

$h(\alpha)=f(\alpha)(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)>0$
$h(\beta)=f(\beta)(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)<0$
$h(\gamma)=f(\gamma)(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)>0$

αφού $f(\alpha),\ f(\beta),\ f(\gamma)>0$ και $\alpha<\beta<\gamma$

Άρα $h(\alpha)\cdot h(\beta)<0$ και $h(\beta)\cdot h(\gamma)<0$ οπότε

από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1\in(\alpha,\beta): h(x_1)=0$

και ένα τουλάχιστον $x_2\in(\beta,\gamma): h(x_2)=0$

Δηλαδή η εξίσωση $h(x)=0$ έχει 2 τουλάχιστον ρίζες στο (α, γ).

Επιπλέον η h είναι πολυωνυμική 2ου βαθμού που μπορεί να έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες, οπότε οι ρίζες x_1, x_2 είναι οι μόνες ρίζες της h.

Γ4. **α)** Η εξίσωση $e^x=x+e$ γράφεται ισοδύναμα

$e^x-x=e\Leftrightarrow \ln\left(e^x-x\right)=\ln e\Leftrightarrow f(x)=1$

Για την $f(x)=\ln\left(e^x-x\right)$ έχουμε: $f'(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}$, όπου $e^x-x>0$

Αν $x<0\Rightarrow e^x<1\Rightarrow e^x-1<0\Rightarrow f'(x)<0\Rightarrow f$ γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $(-\infty,0)$ οπότε $f\left((-\infty,0)\right)=\left(\lim\limits_{x\to 0^-}f(x),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right)=(0,+\infty)$

αφού $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=f(0)=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(e^x-x\right)\overset{u=e^x-x}{=\!=\!=}\lim\limits_{u\to+\infty}(\ln u)=+\infty$

αφού $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x-x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x\right)-\lim\limits_{x\to-\infty}(x)=+\infty$.

Επειδή $1\in(0,+\infty)=f\left((-\infty,0)\right)$ και f φθίνουσα και συνεχής υπάρχει μοναδικό $\rho_1\in(-\infty,0)$ ώστε $f(\rho_1)=1$

Αντίστοιχα ισχύει:

Αν $x>0\Rightarrow e^x>1\Leftrightarrow e^x-1>0$ άρα $f'(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}>0\Rightarrow f$ γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ και συνεχής

Συνεργαζόμενοι Εκπαιδευτικοί-Φροντιστές

άρα $f\left((0,+\infty)\right)=\left(\lim\limits_{x\to 0^+} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=(0,+\infty)$ αφού $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=0$

και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(e^x-x\right) \overset{u=e^x-x}{=\!=\!=} \lim\limits_{u\to+\infty}(\ln u)=+\infty$

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x-x\right) \overset{+\infty-\infty}{=\!=\!=} \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\cdot\left(\frac{e^x}{x}-1\right)\right]=+\infty$

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x} \underset{\text{DLH}}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=\!=\!=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x\right)=+\infty$

Επειδή $1\in(0,+\infty)=f\left((0,+\infty)\right)$ και f αύξουσα και συνεχής υπάρχει μοναδικό $\rho_2\in(0,+\infty): f(\rho_2)=1$.

β) $\int_{\rho_1}^{\rho_2}\left(e^x-1\right)\cdot\sqrt{f(x)}\,dx=\int_{\rho_1}^{\rho_2}\left(e^x-1\right)\cdot\sqrt{\ln\left(e^x-x\right)}\,dx=I$

Θέτω $u=e^x-x\Rightarrow \mathrm{d}u=\left(e^x-x\right)'\mathrm{d}x\Rightarrow \mathrm{d}u=\left(e^x-1\right)\mathrm{d}x$

και $u_1=e^{\rho_1}-\rho_1=e$ και $u_2=e^{\rho_2}-\rho_2=e$

Άρα $I=\int_e^e\sqrt{\ln u}\cdot du=0$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Αν $x>0$ εφαρμόζω Θ.Μ.Τ. για την f στο $[0, x]$ και έχω ότι υπάρχει $\xi\in(0, x)$ ώστε $f'(\xi)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ με $f'(\xi)>1\Rightarrow\frac{f(x)-f(0)}{x}>1\quad\forall x>0$.

Αντίστοιχα αν $x<0$ εφαρμόζω Θ.Μ.Τ. για την f στο $[x, 0]$ και έχω ότι υπάρχει $\xi\in(x,0): f'(\xi)=\frac{f(0)-f(x)}{0-x}\Rightarrow f'(\xi)=\frac{f(x)-f(0)}{x}$ με

$f'(\xi)>1\Rightarrow\frac{f(x)-f(0)}{x}>1\quad\forall x<0$

ΕΙΜΑΣΤΕ ΜΕΣΑ

Άλλος τρόπος

Αν $x > 0$ αρκεί να δείξω ότι ισχύει $f(x)-f(0)>x \Leftrightarrow f(x)-f(0)-x>0$

θεωρώ $g(x)=f(x)-f(0)-x \quad x\in\mathbb{R}$ και έχω $g(0)=0$ και $g'(x)=f'(x)-1>0 \Rightarrow g$ αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα αν $x > 0$ $g(x)>g(0)\Rightarrow f(x)-f(0)-x>0$.

Αν $x < 0$ τότε αρκεί να δείξω ότι:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}>1 \overset{x<0}{\Leftrightarrow} f(x)-f(0)<x \Leftrightarrow f(x)-f(0)-x<0$$

Επειδή $g(x)=f(x)-f(0)-x$ και $g'(x)>0$ οπότε g αύξουσα στο $(-\infty,\ 0]$ έχουμε ότι αν $x<0\Rightarrow g(x)<g(0)\Rightarrow f(x)-f(0)-x<0 \quad \forall x<0$

Δ2. Αφού $f'(x)>1>0\Rightarrow f$ αύξουσα στο $\mathbb{R}\Rightarrow f_{1-1}$, άρα ορίζεται η f^{-1} με

$$D_{f^{-1}}=f(\mathbb{R})=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)$$

Αν $x < 0$ έχουμε από Δ1 ότι:

$f(x)-f(0)<x\Rightarrow f(x)<x+f(0)$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+f(0)\right)=-\infty$

Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

Αν $x > 0$ από Δ1 έχουμε $f(x)>x+f(0)$ με $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+f(0)\right)=+\infty$

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ δηλαδή $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}\Rightarrow D_{f^{-1}}=\mathbb{R}$.

Δ3. **α)** Θεωρώ $h(x)=f(x)+x$ με $h'(x)=f'(x)+1>0\Rightarrow h$ αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα

$$h(\mathbb{R})=h\left((-\infty,+\infty)\right)=\left(\lim_{x\to-\infty}h(x),\lim_{x\to+\infty}h(x)\right) \text{ όπου}$$

$$\lim_{x\to-\infty}h(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)+x\right)=\left(-\infty\right)+\left(-\infty\right)=-\infty$$

και $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+x\right)=\left(+\infty\right)+\left(+\infty\right)=+\infty$

Δηλαδή $h(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ και αφού $0\in\mathbb{R}$ και h αύξουσα στο $\mathbb{R}$ υπάρχει μοναδικό

ΕΙΜΑΣΤΕ ΜΕΣΑ

ρ ∈ ℝ ώστε $h(\rho)=0 \Leftrightarrow f(\rho)+\rho=0 \Leftrightarrow f(\rho)=-\rho$

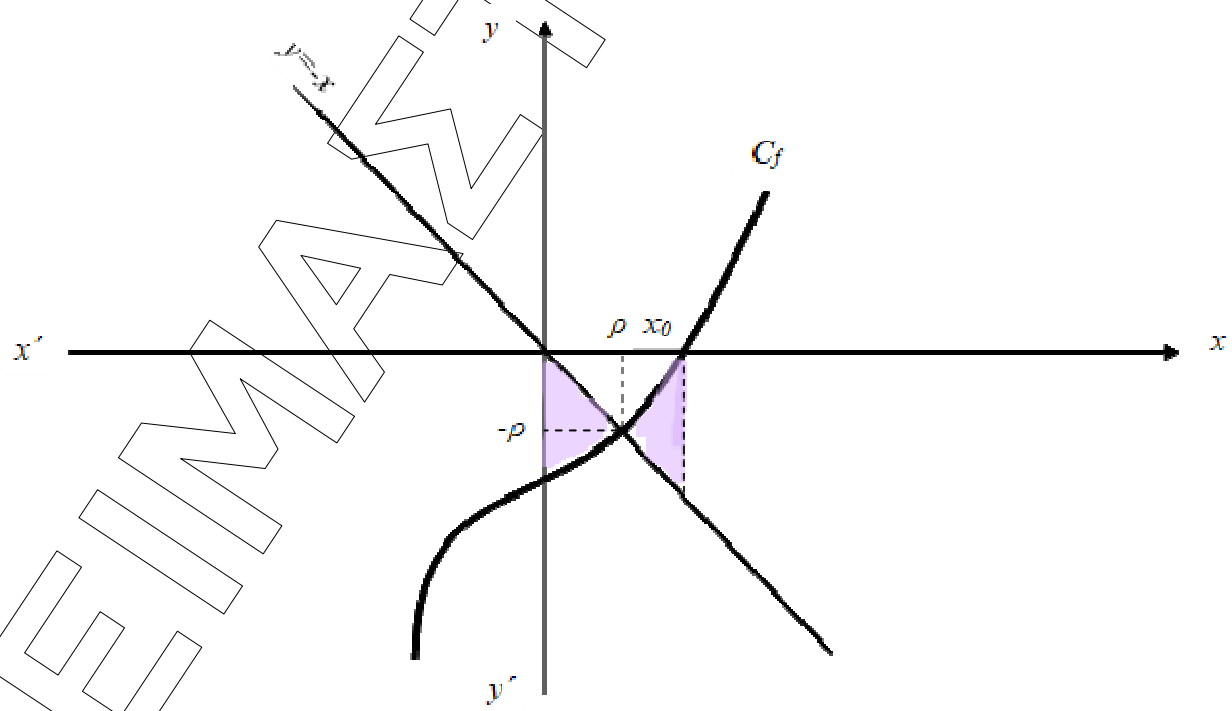
β) $$\lim_{x\to\rho}\frac{\eta\mu(x-\rho)}{f(x)+\rho} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to\rho}\frac{\frac{\eta\mu(x-\rho)}{x-\rho}}{\frac{f(x)-f(\rho)}{x-\rho}} = \frac{\lim\limits_{x\to\rho}\frac{\eta\mu(x-\rho)}{x-\rho}}{\lim\limits_{x\to\rho}\frac{f(x)-f(\rho)}{x-\rho}} = \frac{1}{f'(\rho)}$$

αφού $\lim\limits_{x\to\rho}\frac{\eta\mu(x-\rho)}{x-\rho} \overset{u=x-\rho}{=\!=\!=} \lim\limits_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u}=1$

Επειδή $f'(\rho)>1 \Rightarrow 0<\frac{1}{f'(\rho)}<1$

Άρα ισχύει ότι $0<\lim\limits_{x\to\rho}\frac{\eta\mu(x-\rho)}{f(x)+\rho}<1$.

Δ4. Ισχύει ότι $f(\rho)=-\rho<0$ και αφού $f(x_0)=0$, με x_0 μοναδική ρίζα και f αύξουσα στο ℝ έχουμε ότι $\forall x \le x_0$ ισχύει $f(x)\le f(x_0)=0$



με $f(\rho)<f(x_0) \underset{\text{αύξουσα}}{\overset{f}{\Rightarrow}} \rho<x_0$

Ισχύει ότι $E=\int_0^{x_0}|f(x)|\,dx \overset{f(x)\le 0}{=} -\int_0^{x_0} f(x)\,dx$

Ακόμα έχουμε:

$$\int_0^{\rho}|f(x)-(-x)|\,dx=\int_{\rho}^{x_0}|f(x)-(-x)|\,dx \Leftrightarrow \int_0^{\rho}|f(x)+x|\,dx=\int_{\rho}^{x_0}|f(x)+x|\,dx \qquad (1)$$

Από το Δ3 έχουμε ότι η $h(x)=f(x)+x$ είναι αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και $x=\rho$ μοναδική ρίζα της.

Άρα $h(x)\le 0 \quad \forall x\in[0,\rho]\Rightarrow f(x)+x\le 0\Rightarrow |f(x)+x|=-f(x)-x$

Και $h(x)\ge 0 \quad \forall x\in[\rho,x_0]\Rightarrow f(x)+x\ge 0\Rightarrow |f(x)+x|=f(x)+x$

Από (1) έχουμε

$$\int_0^{\rho}(-f(x)-x)\,\mathrm{d}x=\int_{\rho}^{x_0}(f(x)+x)\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\rho}(-f(x))\,\mathrm{d}x-\int_0^{\rho}x\,\mathrm{d}x=\int_{\rho}^{x_0}f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{\rho}^{x_0}x\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\rho}(-f(x))\,\mathrm{d}x-\int_{\rho}^{x_0}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\rho}x\,\mathrm{d}x+\int_{\rho}^{x_0}x\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{x_0}(-f(x))\,\mathrm{d}x=\int_0^{x_0}x\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow E=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{x_0} \Leftrightarrow E=\frac{x_0^2}{2}.$$

ΕΙΜΑΣΤΕ ΜΕΣΑ