# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

## Β' Γενικού Λυκείου

### Θετικών Σπουδών

**Πέμπτη 28 Απριλίου 2022 | Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες**

# ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

## ΘΕΜΑ Α

**α.** Σχολικό βιβλίο σελ. 83

**β.** Σχολικό βιβλίο σελ. 38

**γ.**

**i)** Λ

**ii)** Σ

**iii)** Λ

**iv)** Λ

**v)** Λ

## ΘΕΜΑ Β

**i)** Η εξίσωση (1) είναι της μορφής $x^2 + y^2 + \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \Gamma = 0$ με $\mathrm{A} = -4\lambda$, $\mathrm{B} = 6\lambda$ και $\Gamma = 13\lambda^2 - 9$.

$\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 - 4\Gamma = 36 > 0$ άρα η (1) παριστάνει κύκλους με $\rho = \dfrac{\sqrt{36}}{2} = 3$ άρα ίσους κύκλους.

ΕΙΜΑΣΤΕ ΜΕΣΑ

**ii)** Οι κύκλοι της (1) έχουν κέντρα Κ(−Α/2, −Β/2) : $(2\lambda, -3\lambda)$, $\lambda \in$ R. Έτσι

$$\left.\begin{matrix} x=2\lambda \\ y=-3\lambda \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} 3x=6\lambda \\ 2y=-6\lambda \end{matrix}\right\} \oplus \quad 3x+2y=0$$

Δηλαδή ο γ.τ. των παραπάνω κέντρων είναι η ευθεία $3x + 2y = 0$.

**iii)** **α)** Η ευθεία $\varepsilon$: $3x + 2y = 0$ είναι (προφανώς) η μεσοπαράλληλη των δύο εφαπτομένων, οι οποίες θα είναι της μορφής $\eta$: $3x + 2y + \kappa = 0$, $\kappa \in$ R.

Για να εφάπτονται στους κύκλους της εξίσωσης (1) αρκεί

$$d(\kappa, n) = P \Leftrightarrow \frac{|3\cdot 2\lambda + 2(-3\lambda) + \kappa|}{\sqrt{3^2+2^2}} = 3 \Leftrightarrow |\kappa| = 3\sqrt{13} \Leftrightarrow \kappa = \pm 3\sqrt{13}$$

Οπότε οι ζητούμενες ευθείες έχουν εξισώσεις:

$\eta_1 : 3x + 2y + 3\sqrt{13} = 0$ και $\eta_2 : 3x + 2y - 3\sqrt{13} = 0$

**β)** Η απόσταση των $\eta_1$ και $\eta_2$ ισούται με τη διάμεσο των ίσων κύκλων:

$d(\eta_1, \eta_2) = 2p = 2 \cdot 3 = 6$.

**iv)** Αν $\lambda = 0$ η (1) γίνεται $x^2 + y^2 = 9$ δηλαδή κύκλος με κέντρο το Ο(0, 0) και ακτίνα $\rho = 3$. Οι εφαπτόμενες προς τον κύκλο θα έχουν εξισώσεις

$xx_1 + yy_1 = \rho^2 \Leftrightarrow xx_1 + yy_1 = 9$, όπου $(x_1, y_1)$ τα σημεία επαφής.

Αφού διέρχονται από το σημείο Α(0, 5) : $0 \cdot x_1 + 5 \cdot y_1 = 9 \Leftrightarrow 5y_1 = 9$ (Ι)

Το $(x_1, y_1)$ ανήκει στον κύκλο $x^2 + y^2 = 9 \Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 = 9$ (ΙΙ)

Λύνουμε το σύστημα των (Ι) και (ΙΙ):

$$y_1 = \frac{9}{5} \Rightarrow x_1^2 + \left(\frac{9}{5}\right)^2 = 9 \Leftrightarrow x_1^2 = 9 - \frac{81}{25} \Leftrightarrow x_1^2 = \frac{225-81}{25} = \frac{144}{25} \Leftrightarrow x_1 = \pm\frac{12}{5}.$$

Έτσι οι δύο ευθείες θα είναι:

$$\varepsilon_1 : \frac{12}{5}x + \frac{9}{5}y = 9 \Leftrightarrow 12x + 9y - 45 = 0$$

$$\varepsilon_2 : \frac{-12}{5}x + \frac{9}{5}y = 9 \Leftrightarrow 12x - 9y + 45 = 0$$


Συνεργαζόμενοι Εκπαιδευτικοί-Φροντιστές
εγγύηση ποιότητας Keystone Software & Consulting

## ΘΕΜΑ Γ

**α.** Το κέντρο του κύκλου Κ θα έχει συντεταγμένες Κ$(1, y)$.

$$(\text{ΚΓ})=(\text{ΚΒ}) \Leftrightarrow \sqrt{(1+1)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(1+1)^2+(y-0)^2} \Leftrightarrow y=1, \text{ άρα } \text{Κ}(1, 1).$$

Δηλαδή θα έχει ακτίνα $\rho=(\text{ΚΒ})=\sqrt{(1+1)^2+(y-0)^2}=\sqrt{5}$

$$c_1:(x-1)^2+(y-1)^2=5 \Leftrightarrow c_1: x^2+y^2-2x-2y-3=0$$

**β.** **i.** Α(3, 0), Γ(−1, 2) με μέσο (1, 1) άρα αντιδιαμετρικά.

**ii)** Η εφαπτομένη ευθεία στο Γ(−1, 2) είναι της μορφής

$\varepsilon: y=\lambda x+\beta \Leftrightarrow \lambda x-y+\beta=0$

$$\text{d}(\text{Κ},\varepsilon)=\rho \Leftrightarrow \frac{|\lambda-1+B|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=\sqrt{5} \Leftrightarrow |\lambda-1+B|=\sqrt{5}\cdot\sqrt{\lambda^2+1} \quad (1)$$

Αλλά αφού διέρχεται και από το σημείο Γ(−1, 2):

$-\lambda-2+\text{B}=0 \Leftrightarrow \text{B}=\lambda+2 \qquad (2)$

Λύνουμε το σύστημα των (1) και (ΙΙ):

$$\frac{|\lambda-1+\lambda+2|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=\sqrt{5} \Leftrightarrow |2\lambda+1|=\sqrt{5}\cdot\sqrt{\lambda^2+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\lambda^2+9\lambda+1=5\lambda^2+5 \Leftrightarrow \lambda^2-4\lambda+4=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda-2)^2=0 \Leftrightarrow \lambda=2 \quad \text{και} \quad \text{B}=4$$

Άρα η ευθεία είναι η: $y=2x+4$.

Τέμνει τον άξονα $xx'$ στο σημείο: Δ(−2, 0) και τον άξονα $yy'$ στο σημείο (0, 4)

**iii)** Η άλλη εφαπτομένη θα είναι της μορφής: $y=\kappa x+\delta \Leftrightarrow \kappa x-y+\delta=0$

και επειδή διέρχεται από το Δ(−2, 0): $0=\kappa(-2)+\delta \Leftrightarrow -2\kappa+\delta=0 \Leftrightarrow \delta=2\kappa$.

$$\text{d}(\text{Κ},\varepsilon)=\rho \Leftrightarrow \frac{|\kappa-1+\delta|}{\sqrt{\kappa^2+1}}=\sqrt{5} \Leftrightarrow |\kappa-1+2\kappa|=\sqrt{5}\cdot\sqrt{\kappa^2+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |3\kappa-1|=\sqrt{5(\kappa^2+1)} \Leftrightarrow 9\kappa^2-6\kappa+1=5\kappa^2+5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\kappa^2-6\kappa-4=0 \Leftrightarrow 2\kappa^2-3\kappa-2=0$$

$\Delta = 9 - 4 \cdot 2\,(-2) = 9 + 16 = 25$

$$\kappa_{1,2} = \frac{3+5}{4} = \begin{cases} \nearrow\ 2 \Rightarrow \delta = 4 \\ \searrow -\frac{1}{2} \Rightarrow \delta = -1 \end{cases}$$

Και προκύπτουν οι ευθείες $\varepsilon_1$: $y = 2x + 4$ (αναμενόμενη από το προηγούμενο υποερώτημα) και η $\varepsilon_2$: $y = -\frac{1}{2}x - 1 \Leftrightarrow 2y = -x - 2 \Leftrightarrow x + 2y + 2 = 0$.

Για να βρούμε τη γωνία των ευθειών $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ όπου

$\varepsilon_1$: $2x - y + 4 = 0$ και $\varepsilon_2$: $y = x + 2y + 2 = 0$ δημιουργούμε δύο διανύσματα $\vec{\delta_1}$ και $\vec{\delta_2}$ παράλληλα με τις $\varepsilon_1$ και $\varepsilon_2$ αντίστοιχα.

$\vec{\delta_1} = (1,2)$ και $\vec{\delta_2} = (2,-1)$

Άρα: $\text{συν}\left(\widehat{\vec{\delta_1},\vec{\delta_2}}\right) = \dfrac{\vec{\delta_1},\vec{\delta_2}}{\left|\vec{\delta_1}\right| \cdot \left|\vec{\delta_2}\right|} = \dfrac{1\cdot 2 + 2(-1)}{\sqrt{1+4}\cdot\sqrt{1+4}} = 0$

Άρα $\vec{\delta_1} \perp \vec{\delta_2}$ (θα μπορούσαμε να "δούμε" $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$)

δηλ. προφανώς η γωνία των $\varepsilon_1$ και $\varepsilon_2$ είναι 90°.

**iv)** Η ελάχιστη απόσταση του Δ από τον κύκλο $c_1$ δημιουργείται αν φέρουμε την ευθεία ΔΚ και δούμε που τέμνει τον κύκλο.

Δ(−2,0)  Κ(1,1)

$\lambda_{\Delta K} = \frac{1}{3}$ άρα ΔΚ: $y - 1 = \frac{1}{3}(x-1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3y - 3 = x - 1 \Leftrightarrow x - 3y + 2 = 0$

Τέμνει τον κύκλο $c_1$: $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0$ στα σημεία που προκύπτουν από τη λύση του συστήματος των δύο εξισώσεων.

$x = 3y - 2$

$(3y - 2)^2 + y^2 - 2\,(3y - 2) - 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9y^2 - 12y + 4 + y^2 - 6y + 4 - 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10y^2 - 20y + 5 = 0 \Leftrightarrow 2y^2 - 4y + 1 = 0$

$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 16 - 8 = 8$


Συνεργαζόμενοι Εκπαιδευτικοί-Φροντιστές
εγγύηση ποιότητας Keystone Software & Consulting

$$y_{1,2}=\frac{4\pm2\sqrt{2}}{4}=\frac{2+\sqrt{2}}{2} \quad \text{ή} \quad \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

• Για $y=\frac{2+\sqrt{2}}{2}\Rightarrow x=3\cdot\frac{2+\sqrt{2}}{2}-2=\frac{6+3\sqrt{2}-4}{2}=\frac{2+3\sqrt{2}}{2}$

• Για $y=\frac{2-\sqrt{2}}{2}\Rightarrow x=3\cdot\frac{2-\sqrt{2}}{2}-2=\frac{6-3\sqrt{2}-4}{2}=\frac{2-3\sqrt{2}}{2}$

Τη μικρότερη απόσταση απέχει το σημείο $M\left(\frac{2-3\sqrt{2}}{2},\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$ και τη μεγαλύτερη το σημείο $N\left(\frac{2+3\sqrt{2}}{2},\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$

## ΘΕΜΑ Δ

**i)** $H\ c: y=x^2 \Leftrightarrow x^2=2\cdot\frac{1}{2}y$ έχει $\rho=\frac{1}{2}$ και $E\left(0,\frac{1}{4}\right)$ και $\delta: y=-\frac{1}{4}$

**ii)** Τα κοινά σημεία της ευθείας με την παραβολή προκύπτουν από τη λύση του συστήματος:

$$\left.\begin{matrix}4\lambda x-4y+1=0\\ y=x^2\end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix}y=\lambda x+\frac{1}{4}\\ y=x^2\end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix}\lambda x+\frac{1}{4}=x^2\\ y=x^2\end{matrix}\right\}$$

$$\begin{cases}x^2-\lambda x-\frac{1}{4}=0 & (\Gamma)\ \text{τριώνυμο με}\ \Delta=(-\lambda)^2-4\cdot1\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=\lambda^2+1>0\\ y=x^2\end{cases}$$

άρα το (Σ) έχει 2 λύσεις δηλ. η ευθεία με την παραβολή 2 κοινά σημεία έστω $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$

ΕΙΜΑΣΤΕ ΜΕΣΑ



εγγύηση ποιότητας Keystone Software & Consulting

**iii)** Η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο Α($x_1$, $y_1$) έχει εξίσωση:

$$\varepsilon_1 : xx_1 = \frac{1}{2}(y + y_1) \Leftrightarrow x_1 \cdot x - \frac{1}{2} \cdot y - \frac{1}{2} y_1 = 0$$

και στο σημείο Β($x_2$, $y_2$):

$$\varepsilon_2 : xx_2 = \frac{1}{2}(y + y_2) \Leftrightarrow x_2 \cdot x - \frac{1}{2} \cdot y - \frac{1}{2} y_2 = 0$$

Και έχουν αντίστοιχους συντελεστές διεύθυνσης

$$\lambda_1 = \frac{-\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = \frac{-x_1}{\frac{-1}{2}} = 2x_1 \quad \text{και} \quad \lambda_2 = \frac{-\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = \frac{-x_2}{\frac{-1}{2}} = 2x_2$$

Η εξίσωση $x^2 - \lambda x - \frac{1}{4} = 0$ έχει γινόμενο ριζών:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{4} \\ \text{και εδώ } \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 2x_1 \cdot 2x_2 = 4x_1 x_2 \end{array}\right\} \text{άρα } \lambda_1 \lambda_2 = 4\left(-\frac{1}{4}\right) = -1$$

δηλαδή οι $\varepsilon_1$ και $\varepsilon_2$ είναι κάθετες μεταξύ τους.

**iv)** Το κοινό σημείο των ευθειών $\varepsilon_1$ και $\varepsilon_2$ θα προκύψει από τη λύση του συστήματος:

$$xx_1 = \frac{1}{2}(y + y_1) \Leftrightarrow 2xx_1 = y + y_1 \Leftrightarrow 2x_1 x - y = y_1$$

$$xx_2 = \frac{1}{2}(y + y_2) \Leftrightarrow 2xx_2 = y + y_2 \Leftrightarrow 2x_2 x - y = y_2$$

$$D = \begin{vmatrix} 2x_1 & -1 \\ 2x_2 & -1 \end{vmatrix} = -2x_1 + 2x_2$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2x_1 & y_1 \\ 2x_2 & y_2 \end{vmatrix} = y_2(2x_1) - y_1(2x_2) = 2y_2 x_1 - x_2 y_1$$

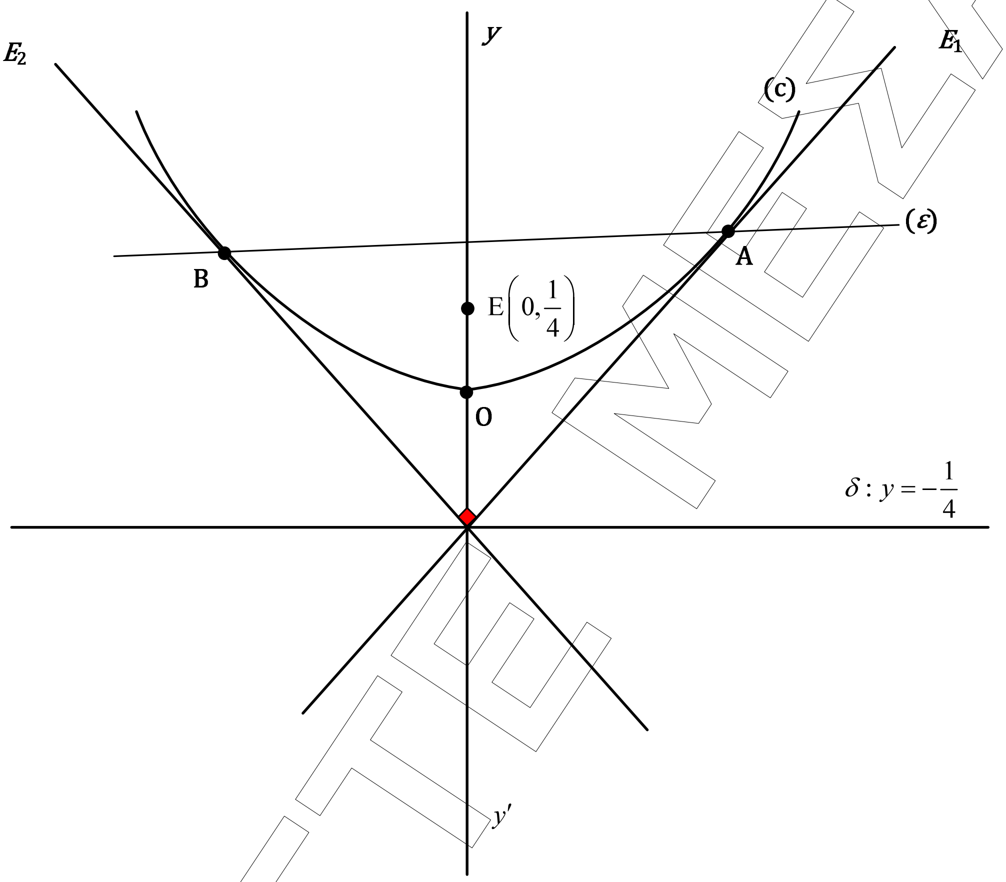
$$\text{Άρα } y = \frac{D_y}{D} = \frac{2x_1 y_2 - 2x_2 y_1}{-2x_1 + 2x_2} = \frac{2x_1 x_2^2 - 2x_2 x_1^2}{-2x_1 + 2x_2} = \frac{2x_1 x_2 \cancel{(x_2 - x_1)}}{2\cancel{(x_2 - x_1)}} = x_1 x_2 = -\frac{1}{4}.$$

Άρα το κοινό σημείο των $\varepsilon_1$ και $\varepsilon_2$ ανήκει στην ευθεία $y = -\frac{1}{4}$.



ΕΙΜΑΣΤΕ ΜΕΣΑ

**v)**




ΕΙΜΑΣΤΕ ΜΕΣΑ