ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Α' Γενικού Λυκείου

Σάββατο 7 Μαΐου 2022 | Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

α) 1 – Λάθος,
2 – Λάθος,
3 – Σωστό,
4 – Σωστό,
5 – Σωστό,

β) Θεώρημα ΙΙ, σελ. 114

ΘΕΜΑ Β

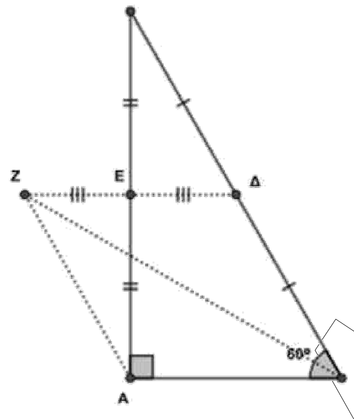
α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΕΖ και ΓΕΔ που έχουν:

ΑΕ = ΕΓ (από υπόθεση)

ΕΖ = ΕΔ (από υπόθεση)

$A\hat{E}Z = \Gamma\hat{E}\Delta$ (ως κατακορυφήν)

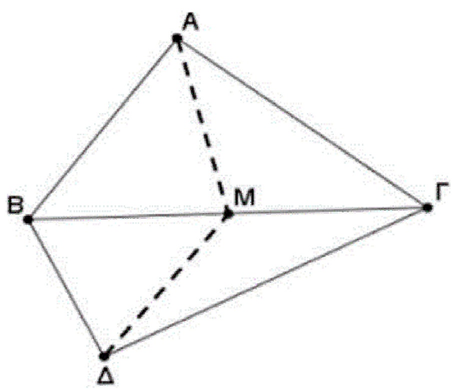
Τα τρίγωνα είναι ίσα αφού έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες, άρα ΑΖ = ΓΔ ως απέναντι πλευρές των ίσων γωνιών $A\hat{E}Z = \Gamma\hat{E}\Delta$.



β) ΑΖ = ΓΔ από το **α)** ερώτημα και ΓΔ = ΔΒ επειδή το σημείο Δ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ. Άρα $AZ = \Delta B = \frac{B\Gamma}{2}$ Από το άθροισμα των γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ έχουμε ότι $\hat{\Gamma} = 30^o$, συνεπώς η απέναντι κάθετη πλευρά ΑΒ ισούται με ΒΓ το μισό της υποτείνουσας ΒΓ, δηλαδή $AB = \frac{B\Gamma}{2}$. Άρα ΑΖ = ΑΒ και το τρίγωνο ΑΒΖ είναι ισοσκελές.

ΘΕΜΑ Γ

α) Το τμήμα ΑΜ είναι διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας οπότε είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή $AM = \frac{B\Gamma}{2}$



Όμοια, το τμήμα ΔΜ είναι διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου ΒΔΓ, που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας οπότε είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή $\Delta M = \frac{B\Gamma}{2}$

Άρα ΑΜ = ΔΜ, οπότε το τρίγωνο ΑΜΔ είναι ισοσκελές.

β) Επειδή $AM=\frac{B\Gamma}{2}=M\Gamma$ το τρίγωνο $AM\Gamma$ είναι ισοσκελές οπότε ισχύει ότι: $M\hat{A}\Gamma=M\hat{\Gamma}A \quad (1)$

Επειδή $\Delta M=\frac{B\Gamma}{2}=M\Gamma$ το τρίγωνο $\Delta M\Gamma$ είναι ισοσκελές οπότε ισχύει ότι: $M\hat{\Delta}\Gamma=M\hat{\Gamma}\Delta \quad (2)$

Η γωνία $A\hat{M}B$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $AM\Gamma$ άρα ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών, οπότε σε συνδυασμό με τη σχέση (1) βρίσκουμε:

$$A\hat{M}B=M\hat{A}\Gamma+M\hat{\Gamma}A \Leftrightarrow A\hat{M}B=2M\hat{\Gamma}A \quad (3)$$

Η γωνία $B\hat{M}\Delta$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο $M\Delta\Gamma$, άρα χρησιμοποιώντας τη σχέση (2) παίρνουμε

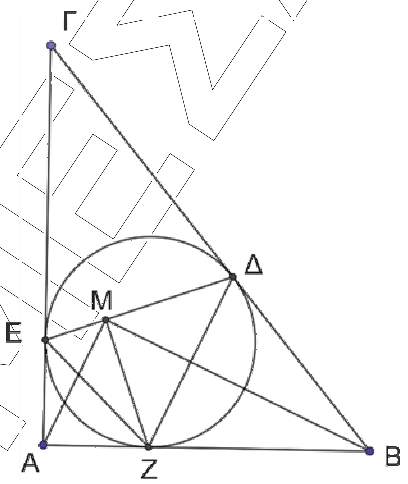
$$B\hat{M}\Delta=M\hat{\Delta}\Gamma+M\hat{\Gamma}\Delta \Leftrightarrow B\hat{M}\Delta=2M\hat{\Gamma}\Delta \quad (4)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (3), (4) και βρίσκουμε:

$$A\hat{M}B+B\hat{M}\Delta=2M\hat{\Gamma}A+2M\hat{\Gamma}\Delta \Leftrightarrow A\hat{M}\Delta=2A\hat{\Gamma}\Delta$$

γ) Είναι $B\hat{A}\Gamma+B\hat{\Delta}\Gamma=90°+90°=180°$, δηλαδή δύο απέναντι γωνίες του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ είναι παραπληρωματικές άρα το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο. Επομένως η πλευρά του $\Gamma\Delta$ φαίνεται από τις κορυφές A και B υπό ίσες γωνίες δηλαδή $\Gamma\hat{B}\Delta=\Gamma\hat{A}\Delta$.

ΘΕΜΑ Δ



α) Το ΑΕ = ΑΖ ως εφαπτόμενα τμήματα από το σημείο Α προς τον εγγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΓ, επομένως το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισοσκελές ορθογώνιο. Άρα $A\hat{E}Z = 45^0 \quad (1)$

Επειδή $E\hat{A}Z + E\hat{M}Z = 90^0 + 90^0 = 180^0$ το τετράπλευρο ΕΜΖΑ είναι εγγράψιμο επομένως $A\hat{E}Z = A\hat{M}Z \quad (2)$ επειδή το ΑΖ φαίνεται από τις κορυφές Ε, Μ υπό ίσες γωνίες.

Η γωνία $A\hat{E}Z$ είναι γωνία υπό χορδής και εφαπτομένης στον εγγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΓ, επομένως ισούται με την εγγεγραμένη γωνία ΕΔΖ άρα $E\hat{\Delta}Z = A\hat{E}Z \quad (3)$

Από (1), (2), (3) έχουμε $A\hat{E}Z = A\hat{M}Z = E\hat{\Delta}Z = 45^0$

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΖΜΔ η γωνία $M\hat{\Delta}Z = 45^0$, επομένως $M\hat{Z}\Delta = 45^0$ και το τρίγωνο είναι ισοσκελές, άρα ΜΖ = ΜΔ και το σημείο Μ ανήκει στην μεσοκάθετο του ΖΔ.

Το ΒΖ = ΒΔ ως εφαπτόμενα τμήματα από το σημείο Β προς τον εγγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΓ άρα το Β ανήκει στην μεσοκάθετο του ΖΔ.

Επομένως η ΒΜ είναι μεσοκάθετος στο ΖΔ και διέρχεται από το έγκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ.

γ) Το ΜΒ είναι ύψος στο ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΜΖΔ επομένως είναι και διχοτόμος της γωνίας $Z\hat{M}A = 90^0$ άρα $Z\hat{M}B = 45^0$

Εφόσον $A\hat{M}B = A\hat{M}Z + Z\hat{M}A = 45^0 + 45^0 = 90^0$ το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ορθογώνιο.