ΑΛΓΕΒΡΑ

Α' Γενικού Λυκείου

Μ. Τετάρτη 20 Απριλίου 2022 | Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σελίδα 62 Σχολικό Βιβλίο

Α2. Σελίδα 63 Σχολικό Βιβλίο

Α3. **i.** Λ

ii. Σ

iii. Λ

iv. Σ

v. Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η περίμετρος του γραμμοσκιασμένου σχήματος ΕΖΒΑΓΔ είναι:

$$\Pi = EZ + ZB + BA + A\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta E = x - y + 2y + x + y + y + y = 2x + 4y$$

Β2. $5 < x < 8 \overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow} 10 < 2x < 16$ **(1)**

$1 < y < 2 \overset{\cdot 4}{\Leftrightarrow} 4 < 4y < 8$ **(2)**

Προσθέτουμε τις **(1)** και **(2)** και έχουμε:

$$14 < 2x + 4y < 24 \Leftrightarrow 14 < \Pi < 24.$$

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2-(\lambda-4)x-\lambda+2$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

Γ1. $\Delta=[-(\lambda-4)]^2-4(-\lambda+2)=\lambda^2-8\lambda+16+4\lambda-8 \Leftrightarrow$

$$\Delta=\lambda^2-4\lambda+8.$$

Γ2. $\Delta=\lambda^2-4\lambda+8=\lambda^2-4\lambda+4+4=(\lambda-2)^2+4>0$

Επομένως το τριώνυμο έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Γ3. Για να έχει δύο ρίζες αρνητικές πρέπει να ισχύει:

$$\begin{cases} S<0 \\ P>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{\beta}{\alpha}<0 \\ \dfrac{\gamma}{\alpha}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda-4<0 \\ -\lambda+2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda<4 \\ \lambda<2 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda<2$$

Γ4. $x_1(x_1-1)+x_2(x_2-1)<2(3+x_1x_2) \Leftrightarrow x_1^2-x_1+x_2^2-x_2<6+2x_1x_2 \Leftrightarrow$

$$x_1^2+x_2^2-2x_1x_2-(x_1+x_2)-6<0$$

$$\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2-2x_1x_2-(x_1+x_2)-6<0 \Leftrightarrow$$

$$S^2-4P-S-6<0 \Leftrightarrow (\lambda-4)^2-4(-\lambda+2)-(\lambda-4)-6<0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2-8\lambda+16+4\lambda-8-\lambda+4-6<0 \Leftrightarrow \lambda^2-5\lambda+6<0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\lambda \in (2,3)}$$

ΘΕΜΑ Δ

$$(8-\lambda)x^2-2(\lambda-2)x+1=0 \ \mathbf{(1)}$$

Δ1. Για να είναι η εξίσωση (1) πρώτου βαθμού πρέπει:

$$8-\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=8.$$

Δ2. Εφόσον η εξίσωση (1) είναι δευτέρου βαθμού επομένως $\lambda \neq 8$.

Για να έχει διπλή ρίζα πρέπει:

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow 4(\lambda-2)^2 - 4(8-\lambda) = 0 \Leftrightarrow 4\lambda^2 - 12\lambda - 16 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = -1 \; \kappa\alpha\iota \; \lambda = 4$$

$$\text{Για } \lambda = -1: (\mathbf{1}) \Rightarrow x = -\frac{1}{3} \text{ (Διπλή ρίζα)}$$

$$\text{Για } \lambda = 4: (\mathbf{1}) \Rightarrow x = +\frac{1}{2} \text{ (Διπλή ρίζα)}$$

Δ3. Για να είναι το τριώνυμο μη αρνητικό πρέπει: $(8-\lambda)x^2 - 2(\lambda-2)x + 1 \geq 0$

Θα πρέπει η Διακρίνουσα του τριωνύμου να είναι μικρότερη ή ίση με το μηδέν.

$$\Delta \leq 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 4 \leq 0 \Leftrightarrow \lambda \in [-1,4].$$