ΤΑΞΗ: 3η ΤΑΞΗ ΕΠΑ.Λ.

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Τετάρτη 5 Μαΐου 2021
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σελίδα 11

Α2. Σελίδα 59-60

Α3. Σελίδα 31 (πρώτη απόδειξη)

Α4. α->3 β->2 γ->4 δ->1 ε->5

Α5. Λ Σ Σ Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Το πινακάκι με τις κλάσεις είναι το παρακάτω:

ΚΛΑΣΕΙΣ	πλάτος
$[20 - \cdots)$	c
$[\cdots - \cdots)$	c
$[\cdots - \cdots)$	c
$[\cdots - \cdots)$	c
$[40 - \cdots)$	
$[\cdots - \cdots)$	
ΣΥΝΟΛΟ	

Ισχύει: $40 - 20 = 4 \cdot c \Leftrightarrow 20 = 4c \Leftrightarrow c = 5$

Β2.

ΚΛΑΣΕΙΣ	x_i	ν_i	N_i	f_i	$F_i\,\%$
$[20-25)$	$45/2$	8	8	0,16	16
$[25-30)$	$55/2$	9	17	0,18	34
$[30-35)$	$65/2$	15	32	0,3	64
$[35-40)$	$75/2$	10	42	0,2	84
$[40-45)$	$85/2$	5	47	0,1	94
$[45-50)$	$95/2$	3	50	0,06	100
ΣΥΝΟΛΟ		50		1,00	

$$x_1=\frac{20+25}{2}=\frac{45}{2},\quad x_2=\frac{25+30}{2}=\frac{55}{2},\quad x_3=\frac{30+35}{2}=\frac{65}{2},\quad x_4=\frac{35+40}{2}=\frac{75}{2},$$

$$x_5=\frac{40+45}{2}=\frac{85}{2},\quad x_6=\frac{45+50}{2}=\frac{95}{2},$$

$N_1=\nu_1=8$

Το $f_1=\frac{\nu_1}{\nu_{o\lambda}}=\frac{8}{50}=\frac{16}{100}=0{,}16$ και $f_1\%=0{,}16\cdot 100=16$ άρα και $F_1\%=f_1\%=16$

Αφού $F_2\,\%=34 \Leftrightarrow F_2=0{,}34$, επίσης $f_1+f_2=F_2 \Leftrightarrow f_1+f_2=0{,}34 \Leftrightarrow 0{,}16+f_2=0{,}34 \Leftrightarrow f_2=0{,}18$

Από $f_2=\frac{\nu_2}{\nu_{o\lambda}} \Leftrightarrow 0{,}18=\frac{\nu_2}{50} \Leftrightarrow \nu_2=0{,}18\cdot 50=9$, οπότε και $N_2=\nu_1+\nu_2=8+9=17$

Το $N_3=N_2+\nu_3 \Leftrightarrow 32=17+\nu_3 \Leftrightarrow \nu_3=15$

Το $f_3=\frac{\nu_3}{\nu_{o\lambda}}=\frac{15}{50}=\frac{30}{100}=0{,}3$ και $f_3\%=0{,}3\cdot 100=30$ και $F_3\%=F_2\%+f_3\%=34+30=64$

Από $f_4=\frac{\nu_4}{\nu_{o\lambda}} \Leftrightarrow 0{,}2=\frac{\nu_4}{50} \Leftrightarrow \nu_4=0{,}2\cdot 50=10$, οπότε και το $N_4=N_3+\nu_4=32+10=42$

Το $f_4\%=0{,}2\cdot 100=20$ και $F_4\%=F_3\%+f_4\%=64+20=84$

Το $f_5=\frac{\nu_5}{\nu_{o\lambda}}=\frac{5}{50}=\frac{10}{100}=0{,}1$ και $f_5\%=0{,}1\cdot 100=10$ οπότε $F_5\%=F_4\%+f_5\%=84+10=94$, επίσης $N_5=N_4+\nu_5=42+5=47$

Το $\nu_6 = \nu_{o\lambda} - N_5 = 50 - 47 = 3$, οπότε το $f_6 = \frac{\nu_6}{\nu_{o\lambda}} = \frac{3}{50} = \frac{6}{100} = 0{,}06$ και

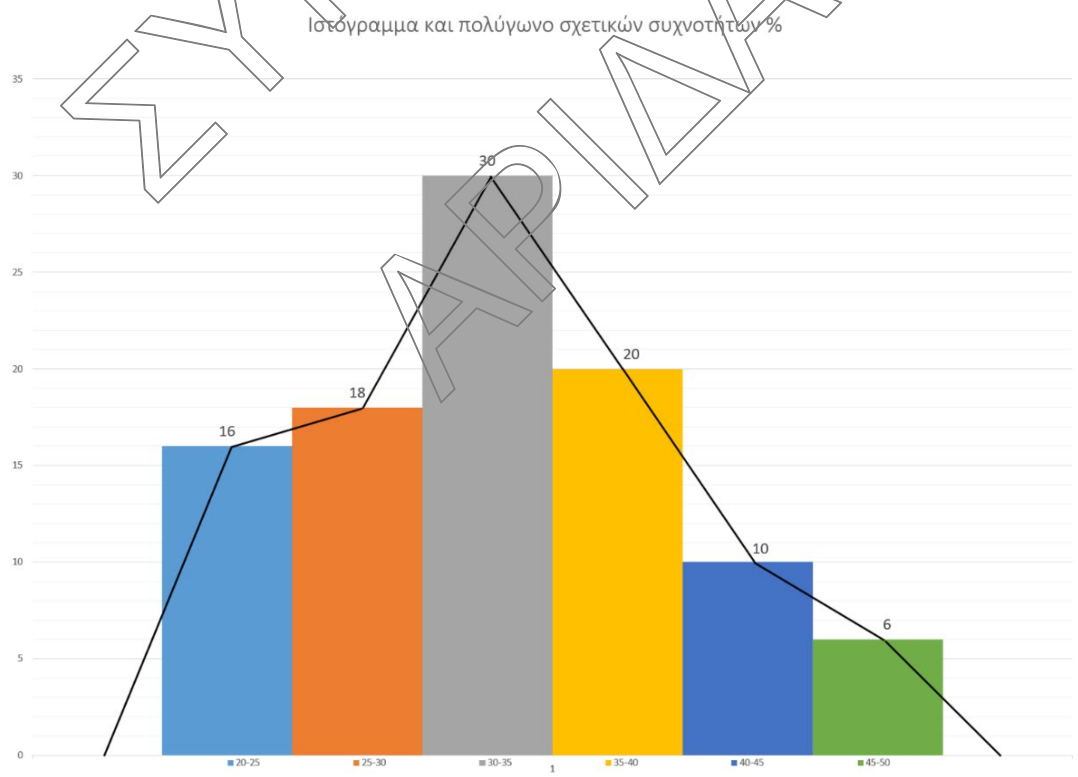
$f_6\% = 0{,}06 \cdot 100 = 6$

Το $N_6 = \nu_{o\lambda} = 50$ και το $f_6\% = 100$

Β3. Τουλάχιστον 40 μήνες είναι: $f_5\% + f_6\% = 10\% + 6\% = 16\%$

Β4.

ΚΛΑΣΕΙΣ	x_i	ν_i	N_i	f_i	$f_i\,\%$	$F_i\,\%$
$[20-25)$	$^{45}/_2$	8	8	0,16	16	16
$[25-30)$	$^{55}/_2$	9	17	0,18	18	34
$[30-35)$	$^{65}/_2$	15	32	0,3	30	64
$[35-40)$	$^{75}/_2$	10	42	0,2	20	84
$[40-45)$	$^{85}/_2$	5	47	0,1	10	94
$[45-50)$	$^{95}/_2$	3	50	0,06	6	100
ΣΥΝΟΛΟ		50		1,00	100	



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Δίνεται $f(x) = x^3 - 6x^2 + \alpha x - \beta$, x ∈ ℝ
Επομένως $f'(x) = 3x^2 - 12x + \alpha$
Επειδή ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης στο $x_0 = 2$ είναι ίσος με -3 πρέπει:
$f'(2) = -3 \Leftrightarrow 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + a = -3 \Leftrightarrow 12 - 24 + a = -3 \Leftrightarrow a = 9$
Επίσης $f(x) = y \Leftrightarrow f(x) = -3x + 4$ για x=2 έχουμε
$f(2) = -3 \cdot 2 + 14 \Leftrightarrow$
$2^3 - 6 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 - \beta = -6 + 14 \Leftrightarrow$
$8 - 24 + 18 - \beta = -6 + 14 \Leftrightarrow$
$\beta = -6$

Γ2. Η συνάρτηση γίνεται $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 6$
Βρίσκουμε την παράγωγο $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow$
$3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow$
$3(x^2 - 4x + 3) = 0 \Leftrightarrow$
$3(x-3)(x-1) = 0 \Leftrightarrow$
$x = 3$ ή $x = 1$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
f'	+	-	+	
f	↗	↘	↗	

Γ3. το 1821, 2021 ∈ $(3, +\infty)$ όπου η f είναι αύξουσα επομένως
$$1821 < 2021 \Leftrightarrow f(1821) < f(2021)$$
το 1,821, 2,021 ∈ $(1,3)$ όπου η f είναι φθίνουσα επομένως
$$1{,}821 < 2{,}021 \Leftrightarrow f(1{,}021) > f(2{,}021)$$

Γ4. Βρίσκουμε την $f''(x) = 6x - 12$
$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f''	-	+	
f'	↘	↗	

άρα ο ρυθμός μεταβολής γίνεται ελάχιστος για x=2, $f'(2) = -3$

Γ5. Για να είναι συνεχής η g για $x_0 = 2$ πρέπει $g(2) = \lim_{x\to 2} g(x)$

Υπολογίζω το $g(2) = -6$

και $\lim_{x\to 2}\frac{6x-12}{4-\sqrt{x^2+4x+4}} = \lim_{x\to 2}\frac{6(x-2)}{\left(4-\sqrt{(x+2)^2}\right)} = \lim_{x\to 2}\frac{6(x-2)}{4-(x+2)} = \lim_{x\to 2}\frac{6(x-2)}{2-x} =$

$\lim_{x\to 2}\frac{6(x-2)}{-(x-2)} = -6$

Επομένως η g είναι συνεχής για $x_0=2$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Από την υπόθεση δίνεται

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x^2+\alpha x+1}{x^2+\beta} = 1$$

Έστω η συνάρτηση $h(x) = \frac{x^2+\alpha x+1}{x^2+\beta},\ x\in \mathbf{R}$

Είναι $h(x) = \frac{x^2+\alpha x+1}{x^2+\beta} \Leftrightarrow x^2+\alpha x+1 = h(x)\left(x^2+\beta\right)$

Από όπου προκύπτει

$$\lim_{x\to 0}\left(x^2+\alpha x+1\right) = \lim_{x\to 0}\left[h(x)\left(x^2+\beta\right)\right] \Rightarrow 1 = 1\cdot\beta \Rightarrow \beta = 1$$

Η ευθεία $y = x+7$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 1$

Η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2+\alpha x+1}{x^2+1}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων με παράγωγο

$$f'(x) = \left(\frac{x^2+\alpha x+1}{x^2+1}\right)' =$$

$$= \frac{\left(x^2+\alpha x+1\right)'\cdot\left(x^2+1\right)-\left(x^2+1\right)'\cdot\left(x^2+\alpha x+1\right)}{\left(x^2+1\right)^2} =$$

$$= \frac{(2x+\alpha)\cdot\left(x^2+1\right)-2x\cdot\left(x^2+\alpha x+1\right)}{\left(x^2+1\right)^2} =$$

$$= \frac{\cancel{2x^3}+\cancel{2x}+\alpha x^2+\alpha-\cancel{2x^3}-2\alpha x^2-\cancel{2x}}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$= \frac{-\alpha x^2+\alpha}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Για να είναι η εφαπτομένη κάθετη στην ευθεία στο σημείο $\mathrm{A}\left(0, f(0)\right)$ πρέπει να ισχύει

$$f'(0)\cdot\lambda=-1 \Leftrightarrow \frac{-\alpha\cdot 0^2+\alpha}{\left(0^2+1\right)^2}\cdot 1=-1 \Leftrightarrow +\alpha=-1$$

Άρα τελικά ο τύπος της f γράφεται $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+1}$ και η παράγωγος είναι

$$f'(x)=\frac{x^2-1}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Δ2. $f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-1}{\left(x^2+1\right)^2}=0 \Leftrightarrow x^2-1=0 \Leftrightarrow x=1 \ \acute{\eta} \ x=-1$

Δ3. Ο πίνακας μονοτονίας είναι:

x	$-\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
f′		+	0	−	0	+	
f		↗		↘		↗	

Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,-1]$, $[1,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1,1]$

Στο x = -1 παρουσιάζεται τοπικό μέγιστο με τιμή

$$f(-1)=\frac{(-1)^2-(-1)+1}{(-1)^2+1}=\frac{1+1+1}{1+1}=\frac{3}{2}$$

Στο 1 παρουσιάζεται τοπικό ελάχιστο με τιμή $f(1)=\dfrac{1^2-1+1}{1^2+1}=\dfrac{1}{2}$

Δ4. Τα πεδία ορισμού των δύο συναρτήσεων είναι $A_f = \mathbf{R},\ A_g = (0,+\infty)$

Το κοινό πεδίο ορισμού είναι $A_{f+g} = (0,+\infty)$

Ο τύπος είναι :

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) = \frac{x^2-x+1}{x^2+1} + \frac{-x^3+3x^2-x+2}{x(x^2+1)} = \frac{x^3-x^2+x}{x(x^2+1)} + \frac{-x^3+3x^2-x+2}{x(x^2+1)} =$$

$$= \frac{x^3-x^2+x-x^3+3x^2-x+2}{x(x^2+1)} = \frac{2x^2+2}{x(x^2+1)} = \frac{2(x^2+1)}{x(x^2+1)} = \frac{2}{x}$$

και το πεδίο ορισμού είναι το σύνολο $A_{f+g} = (0,+\infty)$.

Δ5. Το σημείο Σ είναι πάνω στην συνάρτηση $(f+g)(x) = \frac{2}{x}$, η προβολή του στον άξονα x'x είναι το σημείο Α(x,0) και στον άξονα y'y είναι το σημείο $B\left(0,\frac{2}{x}\right)$

Οπότε $(OB) = |y_\Sigma| = \frac{2}{|x|} = \frac{2}{x},\ x>0$ και $(OA) = x_\Sigma = |x| = x,\ x>0$

Οπότε η περίμετρος του ορθογωνίου είναι

$$\Pi(x) = 2(OA)+2(OB) = 2x+2\frac{2}{x} = 2x+\frac{4}{x}\ ,\ x>0$$

Δ6. Η συναρτηση $\Pi(x) = 2x+\frac{4}{x},\ x>0$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο

$$\Pi'(x) = 2-\frac{4}{x^2}$$

Η παράγωγος μηδενίζεται αν:

$$\Pi'(x)=0 \Leftrightarrow 2-\frac{4}{x^2}=0 \Leftrightarrow 2x^2-4=0 \Leftrightarrow 2x^2=4 \Leftrightarrow x^2=2 \Leftrightarrow x=\sqrt{2}\ \text{δεκτή} \quad \text{ή}$$

$x=-\sqrt{2}$ απορ.

Ο πίνακας μονοτονίας της συνάρτησης Π(x) είναι:

x	$-\infty$	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
Π'		$\parallel$	$-$	0	$+$	
Π			$\searrow$		$\nearrow$	

Οπότε η συνάρτηση παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=\sqrt{2}$ το:

$$\Pi\left(\sqrt{2}\right)=2\sqrt{2}+\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}+\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=2\sqrt{2}+\frac{4\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}+2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$$

Άρα $\Pi(x)\geq\Pi\left(\sqrt{2}\right)\Leftrightarrow\Pi(x)\geq 4\sqrt{2}$