



2021 | Απρίλιος | Φάση 3 | Διαγωνίσματα Επανάληψης

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ' Γενικού Λυκείου

Θετικών Σπουδών & Σπουδών Υγείας / Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής

Μ. Δευτέρα 26 Απριλίου 2021 | Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Α

A1. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το Θεώρημα Fermat.

Μονάδες 3+4

A2. Να δώσετε τον ορισμό του σημείου καμπής.

Μονάδες 4

A3. Δίνεται η παρακάτω πρόταση:

«Αν για κάθε ζεύγος παραγωγισίμων συναρτήσεων f, g ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda$,

τότε ισχύει και $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$.»

α) Να εξετάσετε αν η πρόταση είναι **Αληθής** ή **Ψευδής**.

Μονάδες 1

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 3

A4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν για μία συνάρτηση f ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = +\infty$, τότε η συνάρτηση f δεν ορίζεται για $x = \alpha$.

Μονάδες 2



2021 | Απρίλιος | Φάση 3 | Διαγωνίσματα Επανάληψης

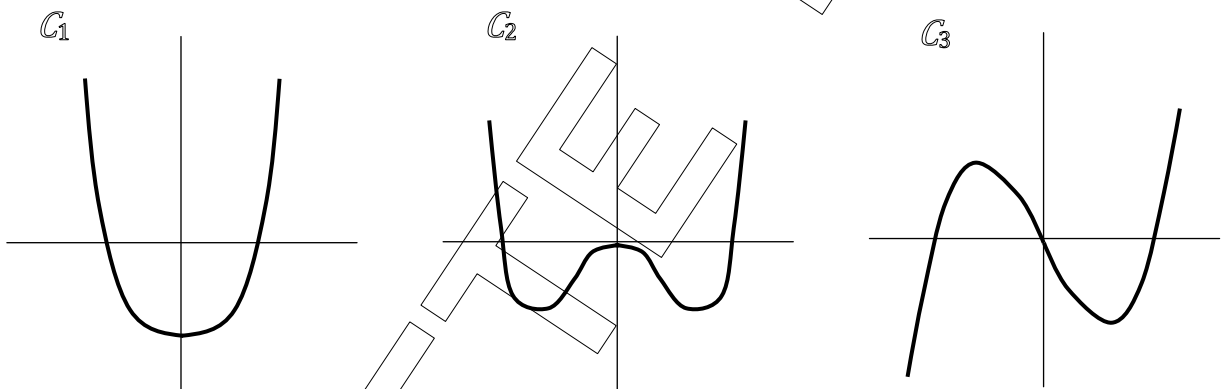
β) Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη.

Μονάδες 2

γ) Η ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f δεν μπορεί να έχει με αυτήν κανένα κοινό σημείο.

Μονάδες 2

A5. Δίνονται οι παρακάτω γραφικές παραστάσεις C_1, C_2, C_3 , οι οποίες αντιστοιχούν σε μία συνάρτηση f , στην παράγωγο f' και στην δεύτερη παράγωγο f'' , με τυχαία σειρά. Να βρείτε την σωστή αντιστοίχιση (χωρίς αιτιολόγηση).



Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε την συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \ln(1 + e^{-x})$, $x \in \mathbb{R}$.

B1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και έχει σύνολο τιμών το διάστημα $(0, +\infty)$.

Μονάδες 6

B2. Να δείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη f^{-1} με $f^{-1}(x) = -\ln(e^x - 1)$, $x \in (0, +\infty)$.

Μονάδες 5



2021 | Απρίλιος | Φάση 3 | Διαγωνίσματα Επανάληψης

B3. α) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f^{-1} και f τέμνουν την ευθεία $y = x$ σε μοναδικό σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0,1)$.

β) Να αποδείξετε ότι οι συντελεστές διεύθυνσης των εφαπτομένων των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1} στο x_0 είναι αντίστροφοι αριθμοί.

Μονάδες 5+3

B4. Θεωρούμε σημείο $M(x(t), y(t))$ με $x(t) = t^{e+1}$ με $t > 0$ που κινείται πάνω στην γραφική παράσταση της συνάρτησης f . Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου M την χρονική στιγμή $t_0 = 1$ sec.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $A = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ με $f((-\infty, 1)) = (-\infty, -1]$ και $f((1, +\infty)) = [3, +\infty)$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν x_1, x_2 με $x_1 < 1 < x_2$ και $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$.

Μονάδες 6

Αν η συνάρτηση f έχει τύπο $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$, τότε:

Γ2. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και την κυρτότητα.

Μονάδες 6

Γ3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες και να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της f .

Μονάδες 5

Γ4. Να αποδείξετε ότι $f(e+1) > f(e) + f'(e-1)$.

Μονάδες 4

Γ5. Να λύσετε την ανίσωση $f(e^x + x) \geq 3$.

Μονάδες 4



ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση f και την συνάρτηση g με τύπο $g(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(x+1)$ για τις οποίες ισχύουν $x^2 \cdot f'(x) = g(x)$, για κάθε $x \in (-1, +\infty)$

και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x \cdot f(0)) = \lambda$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(0) = 1$ και να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ .

Μονάδες 6

Δ2. Να δείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x+1)}{x}, & x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty) \\ 1, & x = 0 \end{cases}$.

Μονάδες 4

Δ3. Να μελετήσετε την μονοτονία της συνάρτησης f .

Μονάδες 5

Δ4. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \geq 1$ ισχύει $\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha-1} \leq \alpha$.

Μονάδες 4

Δ5. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x_1 \in (0, +\infty)$, υπάρχει $x_2 \in (-1, 0)$, έτσι ώστε οι εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της C_g στα σημεία $A(x_1, g(x_1))$ και $B(x_2, g(x_2))$, να τέμνονται κάθετα.

Μονάδες 6

Να έχετε επιτυχία!