ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ' Γενικού Λυκείου

Θετικών Σπουδών & Σπουδών Υγείας / Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής

Μ. Δευτέρα 26 Απριλίου 2021 | Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία

Α2. Θεωρία

Α3. **α)** Ψευδής

β) Θεωρούμε την $f(x)=x+3$ και την $g(x)=x-3$ και ισχύει:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+3}{x-3}=\frac{3}{-3}=-1$$

ενώ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+3)'}{(x-3)'}=1$

Α4. **α)** Λάθος **β)** Σωστό **γ)** Λάθος

Α5. Ισχύει ό,τι: $C_f \equiv C_2$, $C_{f'} \equiv C_3$, $C_{f''} = C_1$

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=\left(\ln(1+e^{-x})\right)'=\dfrac{(1+e^{-x})'}{1+e^{-x}}$

$\Rightarrow f'(x)=\dfrac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Άρα $f(\mathbb{R})=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right)=(0,+\infty)$

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln(1+e^{-x})\right]\overset{u=1+e^{-x}}{=}\lim\limits_{u\to1}\ln u=\ln1=0$

και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\ln(1+e^{-x})\right]\overset{u=1+e^{-x}}{=}\lim\limits_{u\to+\infty}\ln u=+\infty$

Β2. Αφού f είναι γν. φθίνουσα στο $\mathbb{R}\Rightarrow f$ 1 – 1 άρα ορίζεται η f^{-1} με $D_{f^{-1}}=f(\mathbb{R})=(0,+\infty)$

Θέτω $f(x)=y, y>0$ και έχω

$\ln\left(1+e^{-x}\right)=y\Leftrightarrow 1+e^{-x}=e^{y}\Leftrightarrow e^{-x}=e^{y}-1$

$\Leftrightarrow\ln\left(e^{-x}\right)=\ln\left(e^{y}-1\right), y>0$

$\Leftrightarrow -x=\ln\left(e^{y}-1\right)\Leftrightarrow x=-\ln\left(e^{y}-1\right), y>0$

Άρα $f^{-1}(y)=-\ln\left(e^{y}-1\right), y>0$

οπότε $f^{-1}(x)=-\ln\left(e^{x}-1\right), x>0$.

Β3. **α)** Η εξίσωση $f^{-1}(x)=x$ γράφεται ισοδύναμα

$-\ln(e^{-x}-1)=\ln e^{x}\Leftrightarrow\ln(e^{-x}-1)+\ln\left(e^{x}\right)=0$

$\Leftrightarrow\ln\left[(e^{-x}-1)\cdot e^{x}\right]=\ln1\Leftrightarrow e^{2x}-e^{x}=1.$

Θεωρώ τη συνάρτηση $h(x)=e^{2x}-e^{x}-1$ για την οποία ισχύει: h συνεχής στο $[0,\ 1]$ ως άθροισμα συνεχών, $h(0)=-1$ κ' $h(1)=e^{2}-e-1>0$

αφού $e>2\Rightarrow e^{2}>4>e+1$.

Άρα $h(0)\cdot h(1)<0$ και από Θ. Bolnazo υπάρχει $x_0\in(0,1): h(x_0)=0$.

Επιπλέον ισχύει $h'(x)=2e^{2x}-e^x=e^x\left(2e^x-1\right)$ οπότε $h'(x)>0$ για κάθε $x\in(0,1)$, δηλαδή η h είναι γν. αύξουσα στο [0, 1] οπότε η ρίζα x_0 είναι μοναδική.

Επιπλέον αφού $f^{-1}(x_0)=x_0 \Leftrightarrow x_0=f(x_0)$, δηλαδή οι γραφικές παραστάσεις των f, f^{-1} τέμνονται πάνω στην ευθεία $y=x$ σε μοναδικό σημείο (x_0, x_0) με $x_0\in(0,1)$.

β) Αν λ_1 ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f στο σημείο x_0 ισχύει $\lambda_1=f'(x_0)=\dfrac{-e^{-x_0}}{1+e^{-x_0}}$

Αν λ_2 ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο x_0 θα ισχύει $\lambda_2=\left(f^{-1}\right)'(x_0)=-\dfrac{e^{x_0}}{e^{x_0}-1}$ και ισχύει

$$\lambda_1\cdot\lambda_2=\frac{-e^{-x_0}}{1+e^{-x_0}}\cdot\frac{-e^{x_0}}{e^{x_0}-1}=$$

$$\frac{1}{e^{x_0}\cancel{-1}\cancel{+1}-e^{-x_0}}=\frac{1}{e^{x_0}-\dfrac{1}{e^{x_0}}}=\frac{e^{x_0}}{e^{2x_0}-1}=1$$

αφού ισχύει ότι: $e^{2x_0}-e^{x_0}-1=0\Leftrightarrow e^{2x_0}-1=e^{x_0}$

<u>Άλλος τρόπος</u>

Ισχύει ότι $f^{-1}\left(f(x)\right)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$ και αφού f^{-1}, f παραγωγίσιμες έχουμε ότι

$$\left(f^{-1}\left(f(x)\right)\right)'=x'\Leftrightarrow\left(f^{-1}\right)'\left(f(x)\right)\cdot f'(x)=1$$

Για $x=x_0$ έχω $\left(f^{-1}\right)'\left(f(x_0)\right)\cdot f'(x_0)=1$ και αφού $f(x_0)=x_0$ έχουμε τελικά $\left(f^{-1}\right)'(x_0)\cdot f'(x_0)=1\Rightarrow\lambda_2\cdot\lambda_1=1$.

B4. Ισχύει $y(t)=\ln\left(1+e^{-x(t)}\right)\Rightarrow y'(t)=\dfrac{-e^{-x(t)}}{1+e^{-x(t)}}\cdot x'(t)$ (1)

με $x'(t)=(t^{e+1})'=(e+1)t^e$.

Για $t_0=1$ έχουμε $x(t_0)=t_0^{e+1}=1^{e+1}=1$

και $x'(t_0)=(e+1)\cdot t_0^{e}=(e+1)\cdot 1^{e}=e+1$

Από (1) για $t=t_0$ έχουμε

$$y'(t_0)=\frac{-e^{-x(t_0)}}{1+e^{-x(t_0)}}\cdot x'(t_0)=$$

$$=\frac{-e^{-1}}{1+e^{-1}}\cdot(e+1)=\frac{-\frac{1}{\cancel{e}}}{\frac{e+1}{\cancel{e}}}\cdot(e+1)$$

$$=\frac{-1}{e+1}\cdot(e+1)=-1\ \text{μον}/\text{sec}.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,1)$ με $f\big((-\infty,1)\big)=(-\infty,-1]$ έχουμε ότι υπάρχει $x_1\in(-\infty,1)$ με $f(x_1)=-1$ και ισχύει $f(x)\le f(x_1)\ \forall\, x\in(-\infty,1)$, δηλαδή η f παρουσιάζει στο εσ. σημείο x_1 Τ.Μ. οπότε από Θ. Fermat $f'(x_1)=0$.

Ομοίως αφού $f\big((1,+\infty)\big)=[3,+\infty)$ έχουμε ότι υπάρχει $x_2\in(1,+\infty)$ με $f(x_2)=3$ και ισχύει $f(x)\ge f(x_2)\ \forall\, x\in(1,+\infty)$, δηλαδή η f παρουσιάζει στο εσ. σημείο x_2 του $(1,+\infty)$ Τ.Ε. οπότε από Θ. Fermat ισχύει $f'(x_2)=0$.

Γ2. $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$, $\quad D_f=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$

Για $x\neq 1$ έχω

$$f'(x)=\frac{(2x-1)(x-1)-(x^2-x+1)}{(x-1)^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{2x^2-3x+1-x^2+x-1}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

Αν $f'(x)=0\Leftrightarrow x^2-2x=0\Leftrightarrow x(x-2)=0\Leftrightarrow x=0\ $ ή $\ x=2$

Αν $f'(x)>0\Leftrightarrow \dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}>0\Leftrightarrow x^2-2x>0\Leftrightarrow x<0\ $ ή $\ x>2$

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗		↘	‖	↘		↗	
			Τ Μ				ΤΕ		

f γν. αύξουσα στο $(-\infty,0]$, f γν. φθίνουσα στο $[0,1)$, f γν. φθίνουσα στο $(1,2]$ και f γν. αύξουσα στο $[2,+\infty)$ και παρουσιάζει

για $x=0$ Τ.Μ. ίσο με $f(0)=-1$ και για $x=2$ Τ.Ε. ίσο με $f(2)=3$

Ακόμη αν $x<1$ έχω ότι:

$$f''(x)=\left(\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}\right)'=\frac{(2x-2)(x-1)^{\cancel{2}}-(x^2-2x)\cdot 2\cancel{(x-1)}}{(x-1)^{\cancel{4}\,3}}=$$

$$=\frac{2(x-1)^2-2(x^2-2x)}{(x-1)^3}=\frac{2}{(x-1)^3}$$

Αν $x<1$ έχω $f''(x)<0 \Rightarrow f$ κοίλη στο $(-\infty,1)$

Αν $x>1$ έχω $f''(x)>0 \Rightarrow f$ κυρτή στο $(1,+\infty)$

και προφανώς δεν έχει Σ.Κ.

Γ3. <u>Κατακόρυφη ασύμπτωτη</u>

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left[\frac{1}{x-1}\cdot\left(x^2-x+1\right)\right]=+\infty$$

άρα $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.

<u>Πλάγια ασύμπτωτη</u>

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+1}{x^2-x}=1\Rightarrow \lambda=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-x+1}{x-1}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}-x+1-\cancel{x^2}+x}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x-1}=0\Leftrightarrow \beta=0$$

Άρα η $\psi = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Αντίστοιχα $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-x+1}{x^2-x}=1\Rightarrow\lambda=1$

και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2-x+1}{x-1}-x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x-1}=0$

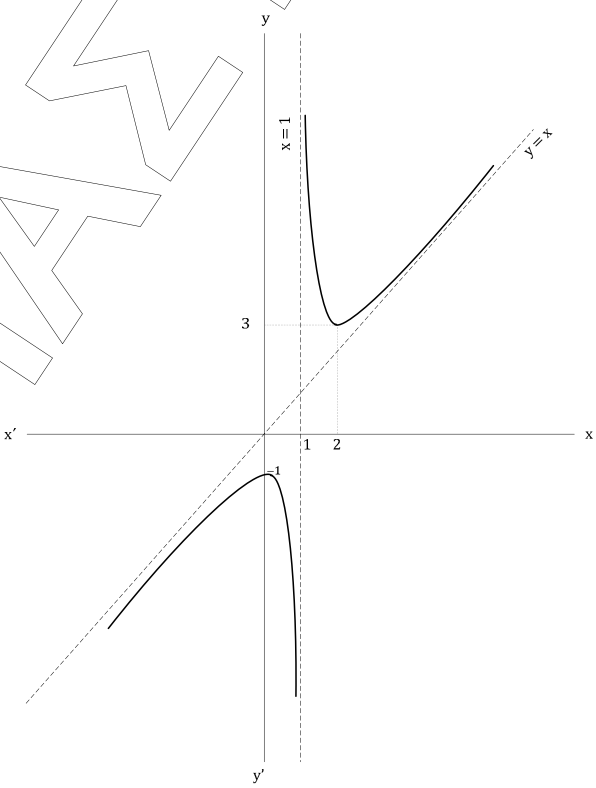
Άρα β = 0

Οπότε η ευθεία $\psi = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη και στο $-\infty$.

Ακόμη έχουμε:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	
$f''(x)$		−		−	‖	+		+	
$f(x)$					‖				

Τ Μ = −1   ΤΕ = 3



Γ4. Εφαρμόζουμε για την f Θ.Μ.Τ. στο $[e, e+1]$ και έχουμε ότι υπάρχει $\xi \in (e, e+1)$ με $f'(\xi)=\dfrac{f(e+1)-f(e)}{e+1-e} \Rightarrow f'(\xi)=f(e+1)-f(e)$

Έχουμε ότι η f είναι κυρτή στο $(1,+\infty)$ άρα η f' είναι γν. αύξουσα στο $(1,+\infty)$

Επειδή

$1<e-1<e<\xi<e+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow e-1<\xi \underset{\text{γν. αύξ.}}{\overset{f'}{\Rightarrow}} f'(e-1)<f'(\xi) \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(e-1)<f(e+1)-f(e) \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(e-1)+f(e)<f(e+1)$

Γ5. Αν $x \in (1, +\infty)$ έχουμε ότι $f(x) \geq 3$ ενώ αν $x \in (-\infty, 1)$ έχουμε ότι $f(x) \leq -1 < 3$.

Άρα αν $f(e^x+x) \geq 3 \Leftrightarrow e^x+x>1 \Leftrightarrow e^x+x-1>0, \quad x \in \mathbb{R}$

Θέτω $g(x)=e^x+x-1$ και έχω $g'(x)=e^x+1>0$

δηλαδή g γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε έχουμε:

$e^x+x-1>0 \Leftrightarrow g(x)>g(0) \underset{\text{γν.αύξ.}}{\overset{g}{\Leftrightarrow}} x>0$.

<u>Άλλος τρόπος</u>

Λύνω την ανίσωση $f(x) \geq 3$

έχω $\dfrac{x^2-x+1}{x-1} \geq 3 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-x+1}{x-1}-3 \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2-x+1-3x+3}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-4x+4}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} (x-2)^2(x-1) \geq 0 \\ x \neq 1 \end{matrix}\right\} \overset{(-x)}{\Leftrightarrow} x>1$

x	$-\infty$ 1	1 2	2 $+\infty$
$x-1$	−	+	+
$(x-2)^2$	+	+	+
Γινόμ.	−	+	+

Άρα $f(e^x+x) \geq 3 \Leftrightarrow e^x+x>1 \Leftrightarrow e^x+x-1>0$.

Έπειτα εργαζόμαστε όπως παραπάνω.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. 1ος τρόπος

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\sqrt{x^2+x}-x\cdot f(0)$ και έχουμε:

$h(x)=|x|\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x}}-x\cdot f(0)$ και για $x>0$ έχουμε $h(x)=x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-f(0)\right)$

με $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-f(0)\right)=1-f(0)$.

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

I) Αν $1-f(0)\neq 0\Leftrightarrow f(0)\neq 1$ τότε έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}h(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[x\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-f(0)\right)\right]=$$

$$=(+\infty)\cdot(1-f(0))=\begin{cases}+\infty, & \text{αν } f(0)<1\\ -\infty, & \text{αν } f(0)>1\end{cases}$$

που είναι άτοπο, αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lambda\in\mathbb{R}$.

II) Αν $f(0)=1$ τότε έχουμε:

$$h(x)=\sqrt{x^2+x}-x=\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}=$$

$$=\frac{\cancel{x^2}+x-\cancel{x^2}}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}$$

και $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\frac{1}{2}\Rightarrow\lambda=\frac{1}{2}$.

2ος τρόπος

Αν $h(x)=\sqrt{x^2+x}-x\cdot f(0)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x\cdot f(0)=\sqrt{x^2+x}-h(x)\overset{:x>0}{\Rightarrow} f(0)=\frac{\sqrt{x^2+x}}{x}-\frac{1}{x}\cdot h(x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(0)=\frac{|x|\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x}-\frac{1}{x}\cdot h(x)\underset{|x|=x}{\overset{x>0}{\Rightarrow}} f(0)=\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\frac{1}{x}\cdot h(x)$$

οπότε έχουμε: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(0)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\frac{1}{x}\cdot h(x)\right)=1-0\cdot\lambda=1\Rightarrow f(0)=1$.

Άρα $h(x)=\sqrt{x^2+x}-x$ και εργαζόμενοι όπως παραπάνω έχουμε

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\frac{1}{2}\Rightarrow\lambda=\frac{1}{2}$.

Δ2.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Ισχύει ότι} & g(x)=\dfrac{x}{x+1}-\ln(x+1)\\ \text{και} & x^2\cdot f'(x)=g(x)\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2\cdot f'(x)=\frac{x}{x+1}-\ln(x+1)\Leftrightarrow x^2\cdot f'(x)=x\left(\ln(x+1)\right)'-\ln(x+1)$$

Για $x\neq 0$ έχουμε:

$$f'(x)=\frac{\left(\ln(x+1)\right)'\cdot x-\ln(x+1)}{x^2}\Leftrightarrow f'(x)=\left(\frac{\ln(x+1)}{x}\right)'\ \forall x\in(-1,0)\cup(0,+\infty)$$

$$\text{Άρα}\ \ f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(x+1)}{x}+c_1 & \text{αν}\ \ x\in(-1,0)\\ \dfrac{\ln(x+1)}{x}+c_2 & \text{αν}\ \ x\in(0,+\infty)\end{cases}$$

Αφού f συνεχής στο $x=0$ με $f(0)=1$ θα ισχύει

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=f(0)=1$.

Όμως $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\ln(x+1)}{x} + c_1 \overset{DLH}{=} \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x+1} + c_1 = 1 + c_1$

και $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(x+1)}{x} + c_2 \overset{DLH}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x+1} + c_2 = 1 + c_2$

Άρα $1 + c_1 = 1 + c_2 = 1 \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$.

$$\text{Άρα } f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x+1)}{x}, & x \in (-1,0)\cup(0,+\infty) \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

Δ3. Ισχύει $x^2 \cdot f'(x) = g(x)$

με $g'(x) = \dfrac{x+1-x}{(x+1)^2} - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1-(x+1)}{(x+1)^2} \Rightarrow g'(x) = \dfrac{-x}{(x+1)^2}$

Αν $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
Αν $g'(x) > 0 \Leftrightarrow -x > 0 \Leftrightarrow x \in (-1,0)$
Αν $g'(x) < 0 \Leftrightarrow -x < 0 \Leftrightarrow x \in (0,+\infty)$
Δηλαδή έχουμε:

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		↗		↘	

ΟΜ

Άρα $g(x) < g(0) = 0$ για κάθε $x \in (-1,0)\cup(0,+\infty)$,
οπότε $x^2 \cdot f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (-1,0)\cup(0,+\infty) \Rightarrow$
$\Rightarrow f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (-1,0)\cup(0,+\infty)$
και αφού f συνεχής στο $x = 0$ έχουμε ότι f γν. φθίνουσα στο $(-1,+\infty)$.

Δ4. Αν $\alpha=1$ έχουμε $\left(1+\frac{1}{1}\right)^{1-1}=1 \Leftrightarrow 2^{o}=1$ που ισχύει.

Αν $\alpha>1$ έχουμε ότι: $\alpha-1<\alpha \underset{\text{γν. φθίν.}}{\overset{f}{\Rightarrow}} f(\alpha-1)>f(\alpha) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln\alpha}{\alpha-1}>\frac{\ln(\alpha+1)}{\alpha} \overset{\alpha(\alpha-1)>0}{\Leftrightarrow} \alpha\cdot\ln\alpha>(\alpha-1)\ln(\alpha+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln\alpha^{\alpha}>\ln(\alpha+1)^{\alpha-1} \underset{\text{γν. αύξ.}}{\overset{\ln}{\Leftrightarrow}} \alpha^{\alpha}>(\alpha+1)^{\alpha-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha\cdot\alpha^{\alpha-1}>(\alpha+1)^{\alpha-1} \Leftrightarrow \alpha>\frac{(\alpha+1)^{\alpha-1}}{\alpha^{\alpha-1}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha>\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)^{\alpha-1} \Leftrightarrow \alpha>\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha-1}$$

Δηλαδή για κάθε $\alpha\geq1$ ισχύει $\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha-1}\leq\alpha$.

Δ5. Θα δείξουμε ότι για κάθε $x_1\in(0,+\infty)$ υπάρχει $x_2\in(-1,0)$ έτσι ώστε $g'(x_1)\cdot g'(x_2)=-1$.

Έχουμε ότι $g'(x)=\frac{-x}{(x+1)^2}$ και ισχύει:

αν $x_1>0 \Rightarrow g'(x_1)<0 \Rightarrow \frac{1}{g'(x_1)}<0 \Rightarrow -\frac{1}{g'(x_1)}>0$.

Επιπλέον αν $x\in(-1,0)$ έχουμε $g'(x)>0$ με

$$\lim_{x\to-1^+} g'(x)=\lim_{x\to-1^+}\frac{-x}{(x+1)^2}=+\infty \quad \text{και} \quad g'(0)=0$$

Άρα $g'\big((-1,0)\big)=(0,+\infty)$

Αφού $-\frac{1}{g'(x_1)}\in(0,+\infty)=g'\big((-1,0)\big)$ και g' συνεχής, υπάρχει

$$x_2\in(-1,0): g'(x_2)=-\frac{1}{g'(x_1)} \Leftrightarrow g'(x_1)\cdot g'(x_2)=-1.$$