ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β' Γενικού Λυκείου

Θετικών Σπουδών

Μ. Τετάρτη 28 Απριλίου 2021 | Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α. Σχολικό βιβλίο σελίδα 84

Β. **i)** Σχολικό βιβλίο σελίδα 71

ii) Σχολικό βιβλίο σελίδα 73

Γ. Γ – Γ – Δ – Δ - Α

ΘΕΜΑ Β

α) Η ευθεία (ε) αφού διέρχεται από το σημείο $K(1, -2)$ θα είναι της μορφής: $y + 2 = \lambda\,(x - 1) \Leftrightarrow y + 2 = \lambda x - \lambda \Leftrightarrow \lambda x - y - \lambda - 2 = 0$.

Η ευθεία τέμνει τους άξονες;

- Τον xx' $(y = 0)$: $\lambda x = \lambda + 2 \Leftrightarrow x = \dfrac{\lambda+2}{\lambda}$ δηλαδή $A\left(\dfrac{\lambda-2}{\lambda},0\right)$
- Τον yy' $(x = 0)$: $-y = \lambda + 2 \Leftrightarrow y = -\lambda - 2$ δηλαδή $B(0, -\lambda-2)$

Το σημείο $K(1, -2)$ αφού είναι μέσο των A, B:

- $1=\dfrac{\frac{\lambda+2}{\lambda}+0}{2} \Leftrightarrow \dfrac{\lambda+2}{\lambda}=2 \Leftrightarrow \lambda+2=2\lambda \Leftrightarrow \lambda=2$

- $-2=\dfrac{-\lambda-2-0}{2} \Leftrightarrow -\lambda-2=-4 \Leftrightarrow \lambda=2$

Έτσι η ευθεία AB είναι η: $y + 2 = 2(x - 1) \Leftrightarrow y + 2 = 2x - 2 \Leftrightarrow 2x - y - 4 = 0$ και τα σημεία $A(2, 0)$ και $B(0, -4)$

β) **i)** Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας AB είναι:

$\lambda = -A/B = 2$, άρα και της ευθείας (n), η οποία αφού διέρχεται από τον $(0, 0)$ είναι $y = 2x$

ii) ένα τυχαίο σημείο της ευθείας (n) είναι το σημείο $\Gamma(x, y)$ ή καλύτερα το $\Gamma(x, 2x)$ αφού το Γ ανήκει στην ευθεία (n).

Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές στο Γ: $(A\Gamma) = (B\Gamma)$. Έτσι

$$(\mathrm{A\Gamma})=\sqrt{(2-x)^2+(2x)^2}=\sqrt{4-4x+x^2+4x^2}=\sqrt{5x^2-4x+4}$$
$$(\mathrm{B\Gamma})=\sqrt{x^2+(2x+4)^2}=\sqrt{x^2+4x^2+16x+16}=\sqrt{5x^2+16x+16}$$

με $A(2, 0)$ και $B(0, 4)$

$(A\Gamma) = (B\Gamma) \Leftrightarrow 5x^2 - 4x + 14 = 5x_2 + 16x + 16 \Leftrightarrow x = -3/5$

Άρα $y = -6/5$ δηλαδή $\Gamma\left(-\dfrac{3}{5}, -\dfrac{6}{5}\right)$

γ) Το εμβαδόν του τριγώνου $(AB\Gamma)$ είναι ίσο με: $\dfrac{1}{2}\cdot B\cdot U$ όπου $\beta = (AB)$ και U: το ύψος, δηλαδή η απόσταση του Γ από την ευθεία AB.

Έτσι: $d(\Gamma, AB)=\dfrac{1}{2}\dfrac{\left|2\cdot\left(-\dfrac{3}{5}\right)-\left(-\dfrac{6}{5}\right)-4\right|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{5}}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

$(AB)=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20}$

$E(AB\Gamma)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4\sqrt{5}}{5}\cdot\sqrt{20}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5}}{5}=4\tau\mu.$

δ) Η κάθετη ευθεία από το (0, 0) στην AB έχει $\lambda = -1/2$, άρα εξίσωση $y = -\frac{1}{2}x$. Η προβολή του (0, 0) πάνω στην ευθεία AB θα είναι η λύση του συστήματος

$$\left.\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x \\ 2x - y - 4 = 0 \end{cases}\right\} \quad \left.\begin{matrix} 2y = -x \\ 2x - y - 4 = 0 \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} 2y = -x \\ 2(-2y) - y - 4 = 0 \end{matrix}\right\}$$

$$\left.\begin{cases} 2y - x \\ -5y = 4 \end{cases}\right\} \quad \begin{matrix} x = \frac{8}{5} \\ y = -\frac{4}{5} \end{matrix}$$ δηλαδή το σημείο $\Delta\left(\frac{8}{5}, -\frac{4}{5}\right)$

ΘΕΜΑ Γ

1) $A = -2\lambda$, $B = 2\lambda + 4$, $\Gamma = 2\lambda^2 + 4\lambda + 2$ και η (1) είναι της μορφής

$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$. Για να παριστάνει κύκλο πρέπει $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$

Είναι: $(-2\lambda)^2 + (2\lambda + 4)^2 - 4(2\lambda^2 + 4\lambda + 2) = 8 > 0$, άρα παριστάνει κύκλο με κέντρο

$$K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) : \left(-\frac{2\lambda}{2}, -\frac{2\lambda+4}{2}\right) : (\lambda, -\lambda-2)$$

και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{8}}{2} = \sqrt{2}$

2) **α)** Η ακτίνα των κύκλων που παριστάνει η (1) είναι σταθερή.

Οπότε οι κύκλοι εφάπτονται σε δύο ευθείες παράλληλες στην ευθεία $x + y + 2 = 0$. Θα είναι της μορφής (n): $x + y + \beta = 0$, $\beta \in R$ και αφού εφάπτεται στους κύκλους της μορφής (1): $d(K, n) = p \Leftrightarrow$

$$\frac{|\lambda - \lambda - 2 + \beta|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow |\beta - 2| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \beta - 2 = 2 \\ \beta - 2 = -2 \end{cases}$$, άρα $\beta = 4$ ή $\beta = 0$, δηλαδή οι εφαπτόμενες ευθείες έχουν εξισώσεις:

$n_1 = x + y + 4 = 0$ $\qquad$ $n_2 = x + y = 0$

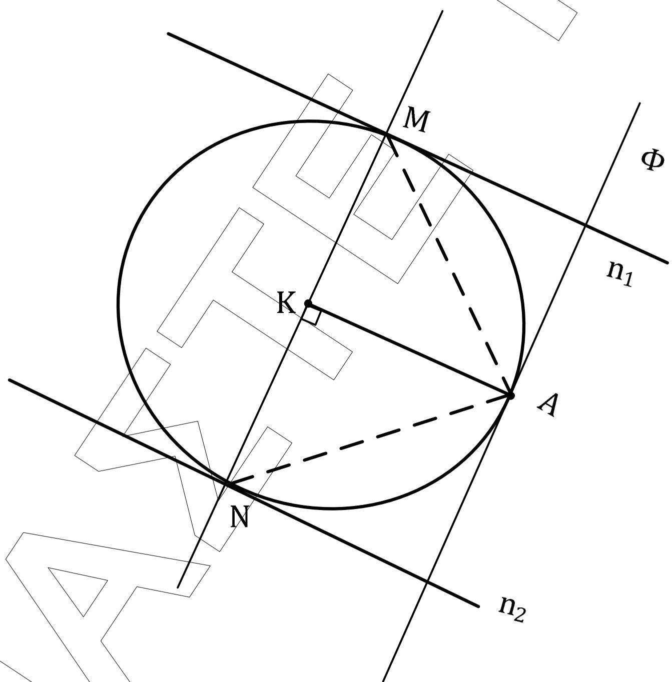
β) i) Αν $\lambda = -1$, η εξίσωση (1) γίνεται: $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 0$ με κέντρο $K(-1, -1)$ Έστω $M(x, y)$ σημείο της εφαπτομένης. Το M ανήκει στην εφαπτομένη αν και μόνο αν:

$$\vec{KA} \perp \vec{AM} \Leftrightarrow \vec{KA} \cdot \vec{AM} = 0 \Leftrightarrow (1,-1)\cdot(x, y+2) = 0 \Leftrightarrow$$
$$1 \cdot x - 1(y+2) = 0 \Leftrightarrow x - y - 2 = 0$$

Άρα η εφαπτομένη στο K είναι $n\varphi$: $x - y - 2 = 0$

ii) Το εμβαδόν του τριγώνου $MAN = 2(AKN) = 2\rho\rho = 2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 4$τ.μ.

iii)



ΘΕΜΑ Δ

1)

$$(MK)=\sqrt{2}(M\Lambda)\Leftrightarrow\sqrt{(x-\eta\mu\alpha)^2+(y-\sigma\upsilon\nu\alpha)^2}=$$
$$=\sqrt{2}\sqrt{(x+\eta\mu\alpha)^2+(y+\sigma\upsilon\nu\alpha)^2}\Leftrightarrow(x-\eta\mu\alpha)^2+(y-\sigma\upsilon\nu\alpha)^2=$$
$$=2(x+\eta\mu\alpha)^2+(y+\sigma\upsilon\nu\alpha)^2\Leftrightarrow x^2+y^2+6\eta\mu\alpha\cdot x+6\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot y+1=0\quad(1)$$

Η εξίσωση (1) είναι της μορφής $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$ με $A=6\eta\mu\alpha$,

$B=6\sigma\upsilon\nu\alpha$ και $\Gamma=1$ και $A^2+B^2-4\Gamma=(6\eta\mu\alpha)^2+(6\sigma\upsilon\nu\alpha)^2-4\cdot1=32>0$.

Άρα παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(-A/2,-B/2)$

δηλαδή $K(-3\eta\mu\alpha,-3\sigma\upsilon\nu\alpha)$

και ακτίνα $\rho=\dfrac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}=\dfrac{\sqrt{32}}{2}=\dfrac{4\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$

2) $K(-3\eta\mu\alpha,-3\sigma\upsilon\nu\alpha)$ άρα

$$\left.\begin{aligned}x_K&=-3\eta\mu\alpha\\y_K&=-3\sigma\upsilon\nu\alpha\end{aligned}\right\}\left.\begin{aligned}x_K^2&=9\eta\mu^2\alpha\\y_K^2&=9\sigma\upsilon\nu^2\alpha\end{aligned}\right\}\begin{aligned}&x_K^2+y_K^2=9\\&\text{δηλαδή κύκλος}\end{aligned}$$

με κέντρο το (0, 0) και ακτίνα 3.

3) **α)** Οι εφαπτόμενες του κύκλου c: $x^2+y^2=9$ θα είναι της μορφής: $xx_1+yy_1=p^2$ $\Leftrightarrow$ $xx_1+yy_1=9$ και αφού περνά από το σημείο $P(0,6)$: $x_1+6y_1=9\Leftrightarrow y_1=9/6=3/2$ (1)

Το σημείο (x_1,y_1) σαν σημείο επαφής τον επαληθεύει.

Δηλαδή $x_1^2+y_1^2=9$ (2)

Λύνοντας το σύστημα των (1) και (2):

$$\left.\begin{aligned}y_1&=\frac{3}{2}\\x_1^2&=\left(\frac{3}{2}\right)^2=9\end{aligned}\right\}\left.\begin{aligned}y_1&=\frac{3}{2}\\x_1^2&+\frac{9}{4}=9\end{aligned}\right\}\begin{aligned}y_1&=\frac{3}{2}\\x_1^2&=9-\frac{9}{4}=\frac{27}{4}\end{aligned}$$

Άρα $x_1=\sqrt{\frac{27}{4}}$ ή $x_1=-\sqrt{\frac{27}{4}}$ δηλαδή $x_1=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ή $x_1=\frac{-3\sqrt{3}}{2}$

Δηλαδή τα δύο σημεία επαφής είναι τα $H_1\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)$ και $H_2\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)$

που μας οδηγούν στις 2 εφαπτόμενες ευθείες:

- n_1: $x\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}+y\cdot\frac{3}{2}=9\Leftrightarrow 3\sqrt{3}\cdot x+3y-18=0\Leftrightarrow \sqrt{3}\cdot x+y-6=0$
- n_2: $x\cdot\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)+y\cdot\frac{3}{2}=9\Leftrightarrow -3\sqrt{3}\cdot x+3y-18=0\Leftrightarrow -\sqrt{3}\cdot x+y-6=0$

β) Η ευθεία n_1 είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta_1}=(1,-\sqrt{3})$ και η n_2

είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta_2}=(1,\sqrt{3})$.

Άρα $\text{συν}\left(\widehat{n_1,n_2}\right)=\text{συν}\left(\widehat{\delta_1,\delta_2}\right)=\frac{\vec{\delta_1}\cdot\vec{\delta_2}}{\left|\vec{\delta_1}\right|\cdot\left|\vec{\delta_2}\right|}=\frac{(1,-\sqrt{3})(1,\sqrt{3})}{\sqrt{1+3}\cdot\sqrt{1+3}}=$

$=\frac{1-\sqrt{3}^2}{2\cdot 2}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$ άρα η γωνία που ζητάμε είναι η $\hat{\varphi}=120^o$.

4) Για να εφάπτονται οι κύκλοι (1) ταυτόχρονα στους άξονες xx' και yy' θα πρέπει $|x_K|=p$ και $|y_K|=p$.

Έτσι $\left.\begin{array}{l}|x_K|=p\Leftrightarrow |x_K|^2=p^2\\ |y_K|=p\Leftrightarrow |y_K|^2=p^2\end{array}\right\} x_K^{\ 2}+y_K^{\ 2}=2p^2\Leftrightarrow(-3\text{ημ}\alpha)^2+(-3\text{συν}\alpha)^2=2\left(2\sqrt{2}\right)^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9\text{ημ}^2\alpha+9\text{συν}^2\alpha=2\cdot 8\Leftrightarrow 9(\text{ημ}^2\alpha+\text{συν}^2\alpha)=16\Leftrightarrow 9=16$ αδύνατο

Άρα δεν υπάρχουν κύκλοι του ερωτήματος (α) που να εφάπτονται ταυτόχρονα στους άξονες.