ΑΛΓΕΒΡΑ (ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 1)

Β' Γενικού Λυκείου

Γενικής Παιδείας

Μ. Δευτέρα 26 Απριλίου 2021 | Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σελ.135 Σχολικό βιβλίο

Α2. Ορισμός σελ.74 Σχολικό βιβλίο

Α3.
i. Λ
ii. Σ
iii. Σ
iv. Λ
v. Σ

ΘΕΜΑ Β

$$\eta\mu\alpha = \frac{12}{13} \text{ και } \sigma\upsilon\nu\beta = \frac{3}{5} \text{ με } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \text{ και } \frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$$

Β1. Από την τριγωνομετρική ταυτότητα: $\eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha = 1$ υπολογίζω ότι:

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = -\frac{5}{13} \text{ εφόσον } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \quad \text{και}$$

$$\eta\mu\beta = -\frac{4}{5} \text{ εφόσον } \frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$$

Β2. $\eta\mu(\alpha+\beta)=\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta+\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\eta\mu\beta \Leftrightarrow \eta\mu(\alpha+\beta)=\frac{56}{65}$

Β3. $\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)=\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\beta \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)=-\frac{63}{65}$

Β4. $\varepsilon\varphi\alpha=\frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}=-\frac{12}{5}$ και $\varepsilon\varphi\beta=\frac{\eta\mu\beta}{\sigma\upsilon\nu\beta}=-\frac{4}{3}$. Επίσης ισχύει:

$$\varepsilon\varphi2\beta=\frac{2\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi^2\beta} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi2\beta=\frac{24}{7}$$

Επομένως: $\varepsilon\varphi(\alpha+2\beta)=\frac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi2\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha\cdot\varepsilon\varphi2\beta}=\frac{36}{323}$.

ΘΕΜΑ Γ

$$f(x)=\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{2}x\right)+\beta$$

Γ1. Εφόσον η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(\pi, 4)$ και $B(-2\pi, 6)$ τότε:

$$f(\pi)=4 \Leftrightarrow \alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}\right)+\beta=4 \Leftrightarrow \boldsymbol{\beta=4}.$$

$$f(-2\pi)=6 \Leftrightarrow \alpha\cdot\sigma\upsilon\nu(-\pi)+\beta=6 \Leftrightarrow \alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\pi+4=6 \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha=-2}.$$

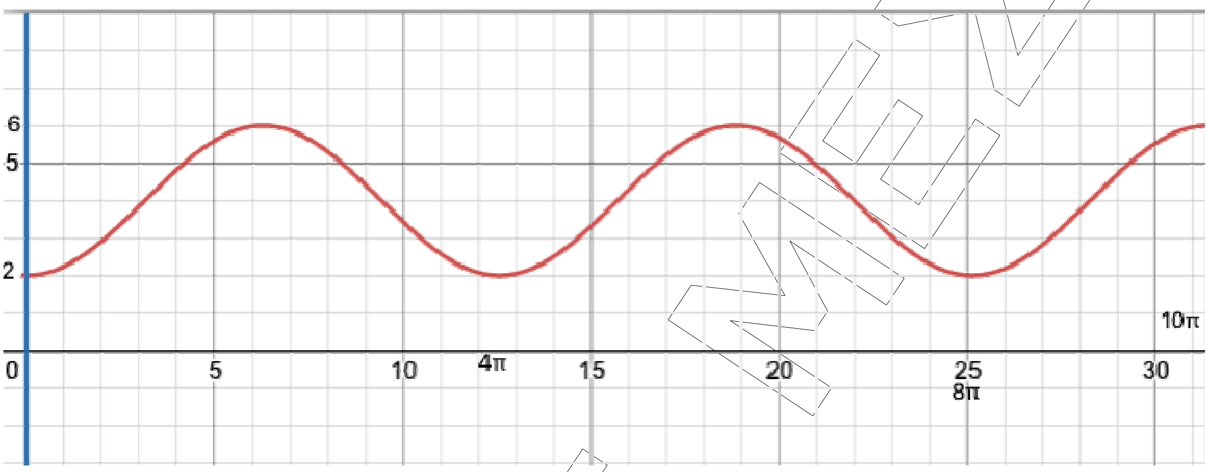
Γ2. $f(x)=-2\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{2}x\right)+4$

i. $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi\ rad$

$$-1\le\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{2}x\right)\le1 \Leftrightarrow 2\ge-2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{2}x\right)\ge-2 \Leftrightarrow 6\ge-2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{2}x\right)+4\ge2$$

Επομένως η **μέγιστη** τιμή της f είναι 6 και η **ελάχιστη** τιμή της f είναι 2.

ii.



Γ3. $$f\left(\frac{80\pi}{3}\right)=-2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{80\pi}{3}\right)+4=-2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{40\pi}{3}\right)+4=-2\sigma\upsilon\nu\left(13\pi+\frac{\pi}{3}\right)+4$$

$$=-2\sigma\upsilon\nu\left(12\pi+\pi+\frac{\pi}{3}\right)+4=-2\sigma\upsilon\nu\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+4=+2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3}\right)+4=$$

$$=2\cdot\frac{1}{2}+4=1+4=5.$$

Γ4. $$f(x)=5\Leftrightarrow -2\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{2}x\right)+4=5\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{2}x\right)=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{2}x\right)=-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{2}x\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{2}x\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{3}\right)\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\frac{1}{2}x=2\kappa\pi+\frac{2\pi}{3}\\ \frac{1}{2}x=2\kappa\pi-\frac{2\pi}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\kappa\pi+\frac{4\pi}{3}\\ x=4\kappa\pi-\frac{4\pi}{3}\end{cases}$$,για κάθε $\kappa\in\mathbb{Z}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

- Το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-1 \to P(1)=0 \Leftrightarrow 1+\beta+\gamma+\delta=0$ (1)

- Η αριθμητική τιμή του πολυωνύμου $P(x)$ για $x=3$ είναι ίση με $2 \to P(3)=2 \Leftrightarrow$

  $27+9\beta+3\gamma+\delta=2 \Leftrightarrow 9\beta+3\gamma+\delta=-25$ (2)

- Τα υπόλοιπα των διαιρέσεων $P(x):(x-2)$ και $P(x):(x+2)$ είναι ίσα $\to$.

  $P(2)=P(-2) \Leftrightarrow 8+4\beta+2\gamma+\delta=-8+4\beta-2\gamma+\delta \Leftrightarrow 4\gamma=-16 \Leftrightarrow \gamma=-4$

  Αντικαθιστώ στις σχέσεις (1) και (2) το $\gamma=-4$ και έχω το παρακάτω σύστημα:

  $$\begin{cases} \beta+\delta=3 \\ 9\beta+\delta=-13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta=3-\beta \\ 9\beta+3-\beta=-13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta=3-\beta \\ 8\beta=-16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta=5 \\ \beta=-2 \end{cases}.$$

  Επομένως,

  $$P(x)=x^3-2x^2-4x+5.$$

Δ2. Λύνω την εξίσωση:

$P(x)=x-1 \Leftrightarrow x^3-2x^2-4x+5=x-1 \Leftrightarrow x^3-2x^2-5x+6=0$

Με τη βοήθεια του σχήματος Χόρνερ καταλήγω:

$(x-1)\cdot(x^2-x-6)=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=-2$ ή $x=3$.

Αντικαθιστώντας στην ευθεία: $y=x-1$ και καταλήγω ότι τα σημεία τομής είναι:

$$A(1,0) \qquad B(-2,-3) \qquad \Gamma(3,2)$$

Δ3. Αν $\pi(x)$ και $\upsilon(x)$ είναι αντίστοιχα το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο $Q(x)=\left(x^2-3x+2\right)$ τότε έχουμε:

$$\pi(x)=x+1 \text{ και } U(x)=-3x+3$$

$$\frac{2x}{\upsilon(x)}<\frac{1}{\pi(x)}\Leftrightarrow\frac{2x}{-3x+3}<\frac{1}{x+1}\Leftrightarrow\frac{2x}{-3x+3}-\frac{1}{x+1}<0\Leftrightarrow\frac{2x^2+5x-3}{(-3x+3)(x+1)}<0\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow(2x^2+5x-3)(-3x+3)(x+1)<0$ με $x\neq-1$ και $x\neq1$. (

Από την επίλυσης την ανίσωσης με πινακάκι έχουμε ότι:

Η λύση της ανίσωσης είναι: $x\in(-\infty,-3)\cup\left(-1,\frac{1}{2}\right)\cup(1,+\infty)$

Δ4.

$$\sqrt{\frac{P(x)+3x-3}{Q(x)}}=1-x\Leftrightarrow\sqrt{x+1}=1-x \quad (*)$$

έχω τους περιορισμούς:

$$\begin{cases}x+1\geq0\\1-x\geq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq-1\\x\leq1\end{cases}\Leftrightarrow-1\leq x\leq1$$

Υψώνω τη σχέση (*) στο τετράγωνο και έχω:

$$x+1=1-2x+x^2\Leftrightarrow x^2-3x=0\Leftrightarrow$$

$$x=0\,(\text{Δεκτή}) \text{ ή } x=3 \text{ (Απορρίπτεται)}$$

ΑΛΓΕΒΡΑ (ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 2)

Β' Γενικού Λυκείου

Γενικής Παιδείας

Μ. Δευτέρα 26 Απριλίου 2021 | Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σελ.135 Σχολικό βιβλίο

Α2. Ορισμός σελ.74 Σχολικό βιβλίο

Α3.
- **i.** Λ
- **ii.** Σ
- **iii.** Σ
- **iv.** Λ
- **v.** Σ

ΘΕΜΑ Β

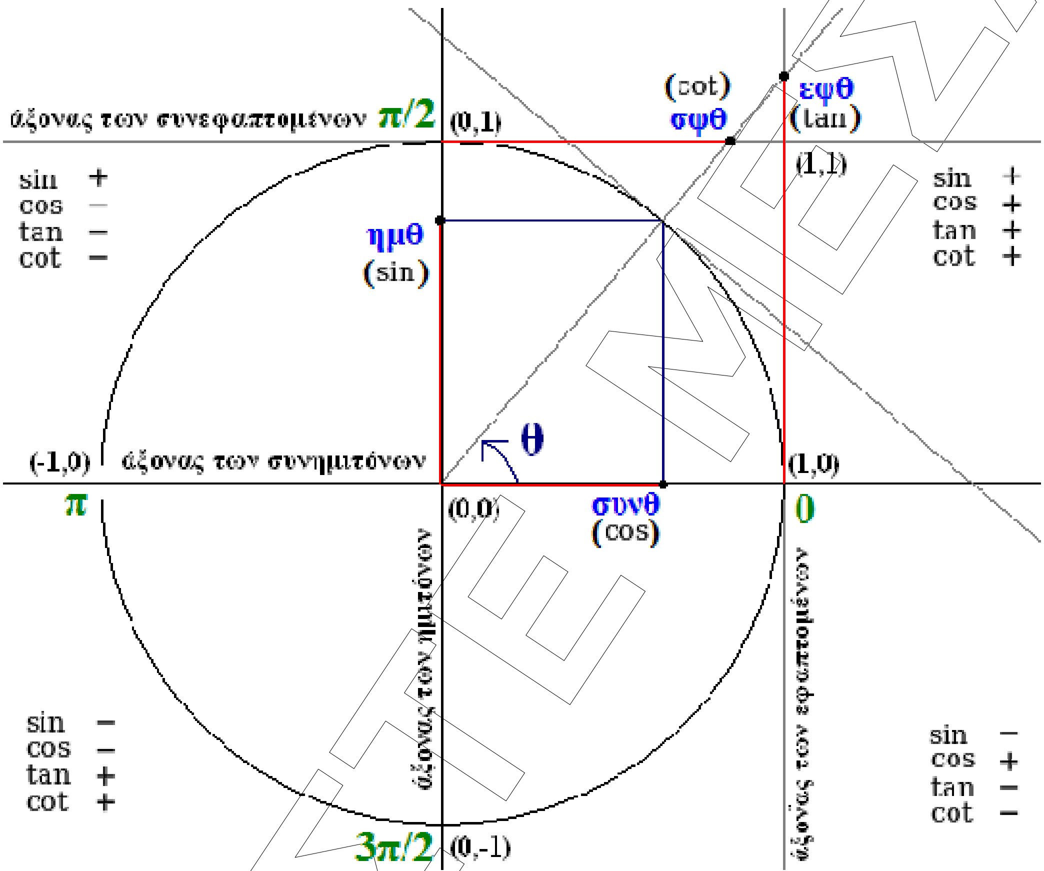
$$\eta\mu\alpha = \frac{12}{13} \text{ και } \sigma\upsilon\nu\beta = \frac{3}{5} \text{ με } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \text{ και } \frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$$

Β1. Από την τριγωνομετρική ταυτότητα: $\eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha = 1$ υπολογίζω ότι:

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = -\frac{5}{13} \text{ εφόσον } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \quad \text{και}$$

$$\eta\mu\beta = -\frac{4}{5} \text{ εφόσον } \frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$$

Β2.



Πρέπει να ισχύει $1-\text{συν}x \geq 0 \Leftrightarrow \text{συν}x \leq 1$, το οποίο ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\text{ημ}x \geq 0$, το οποίο ισχύει για κάθε $x \in [2\kappa\pi, 2\kappa\pi+\pi]$, $\kappa \in Z$.

Συναληθεύοντας, έχουμε ότι το πεδίο ορισμού της f είναι το $A_f = [2\kappa\pi, 2\kappa\pi+\pi]$, $\kappa \in Z$.

Β3. Έστω $x_1, x_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ με $x_1 < x_2$.

Έχουμε:

$$x_1 < x_2 \overset{\text{συν}x\downarrow\ \text{στο}\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}{\Leftrightarrow} \text{συν}x_1 > \text{συν}x_2 \Leftrightarrow -\text{συν}x_1 < -\text{συν}x_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-\text{συν}x_1 < 1-\text{συν}x_2 \overset{\sqrt{x}\uparrow}{\Leftrightarrow} \sqrt{1-\text{συν}x_1} < \sqrt{1-\text{συν}x_2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα, η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Β4. Για κάθε $x \in [0, \pi]$, έχουμε:

$$-1 \le \text{συν}x \le 1 \Leftrightarrow 1 \ge -\text{συν}x \ge -1 \Leftrightarrow -1 \le -\text{συν}x \le 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 \le 1-\text{συν}x \le 2 \Leftrightarrow 0 \le \sqrt{1-\text{συν}x} \le \sqrt{2} \ (1)$$

Και $0 \le \text{ημ}x \le 1 \Leftrightarrow 0 \le \sqrt{\text{ημ}x} \le 1 \ (2)$

Από (1)+(2) παίρνουμε: $0 \le \sqrt{1-\text{συν}x} + \sqrt{\text{ημ}x} \le \sqrt{2}+1 \Rightarrow 0 \le f(x) \le \sqrt{2}+1$

Η ανισότητα δεν αρκεί, για να ισχυριστούμε με βεβαιότητα ότι $f_{\min} = 0$, $f_{\max} = \sqrt{2}+1$, γιατί μπορεί να μην υπάρχουν τιμές του x στο $[0, \pi]$, τέτοιες ώστε η f να παίρνει τις τιμές 0, $\sqrt{2}+1$.

Πιο συγκεκριμένα, εδώ μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι $f(0) = 0$, άρα ισχύει ότι η f παρουσιάζει ελάχιστη τιμή στο 0, το 0.

Αλλά, μπορούμε να πούμε κάτι αντίστοιχο για το $\sqrt{2}+1$;

Γενικά, για να μιλήσουμε για ακρότατο (ελάχιστο ή μέγιστο), πρέπει, εκτός από την ισχύ της ανισοϊσότητας, να είμαστε βέβαιοι ότι υπάρχει στο διάστημα που εργαζόμαστε τιμή του x, που ικανοποιεί το «=».

ΘΕΜΑ Γ

$$f(x)=\alpha\cdot\text{συν}\left(\frac{1}{2}x\right)+\beta$$

Γ1. Εφόσον η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(\pi, 4)$ και $B(-2\pi, 6)$ τότε:

$$f(\pi)=4\Leftrightarrow \alpha\cdot\text{συν}\left(\frac{\pi}{2}\right)+\beta=4\Leftrightarrow \boldsymbol{\beta}=4.$$

$$f(-2\pi)=6\Leftrightarrow \alpha\cdot\text{συν}(-\pi)+\beta=6\Leftrightarrow \alpha\cdot\text{συν}\pi+4=6\Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha}=-2.$$

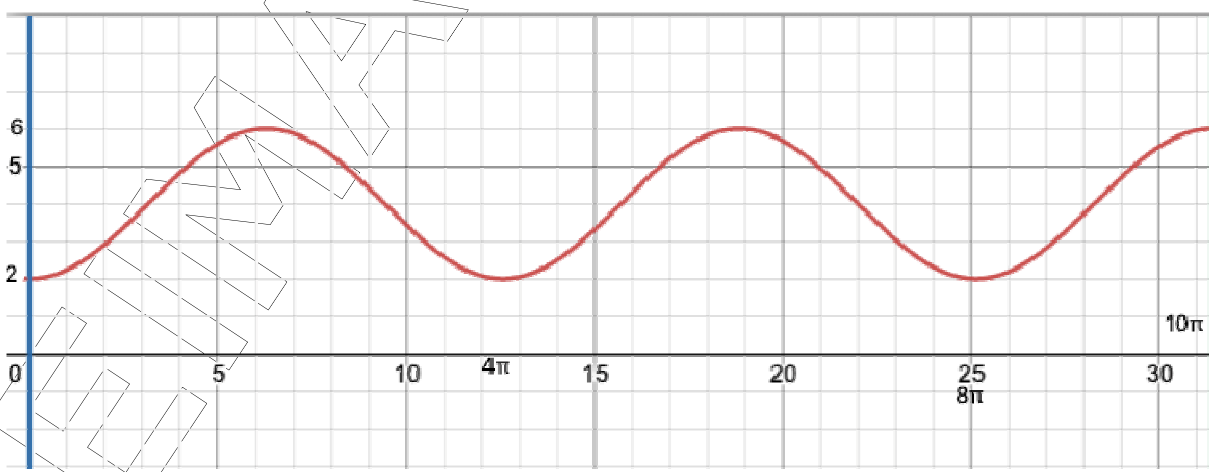
Γ2. $f(x)=-2\cdot\text{συν}\left(\frac{1}{2}x\right)+4$

i. $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=\dfrac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi\ rad$

$$-1\le\text{συν}\left(\frac{1}{2}x\right)\le 1\Leftrightarrow 2\ge -2\text{συν}\left(\frac{1}{2}x\right)\ge -2\Leftrightarrow 6\ge -2\text{συν}\left(\frac{1}{2}x\right)+4\ge 2$$

Επομένως η **μέγιστη** τιμή της f είναι 6 και η **ελάχιστη** τιμή της f είναι 2.

ii.



Γ3. $f\left(\frac{80\pi}{3}\right)=-2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{80\pi}{3}\right)+4=-2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{40\pi}{3}\right)+4=-2\sigma\upsilon\nu\left(13\pi+\frac{\pi}{3}\right)+4$

$=-2\sigma\upsilon\nu\left(12\pi+\pi+\frac{\pi}{3}\right)+4=-2\sigma\upsilon\nu\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+4=+2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3}\right)+4=$

$$=2\cdot\frac{1}{2}+4=1+4=5.$$

Γ4. $f(x)=5\Leftrightarrow-2\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{2}x\right)+4=5\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{2}x\right)=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{2}x\right)=-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{2}x\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{2}x\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{3}\right)\Leftrightarrow$

$\begin{cases}\frac{1}{2}x=2\kappa\pi+\frac{2\pi}{3}\\ \frac{1}{2}x=2\kappa\pi-\frac{2\pi}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\kappa\pi+\frac{4\pi}{3}\\ x=4\kappa\pi-\frac{4\pi}{3}\end{cases}$, για κάθε $\kappa\in\mathbb{Z}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

- Το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-1\rightarrow P(1)=0\Leftrightarrow1+\beta+\gamma+\delta=0$ (1)

- Η αριθμητική τιμή του πολυωνύμου $P(x)$ για $x=3$ είναι ίση με $2\rightarrow P(3)=2\Leftrightarrow$

  $27+9\beta+3\gamma+\delta=2\Leftrightarrow9\beta+3\gamma+\delta=-25$ (2)

- Τα υπόλοιπα των διαιρέσεων $P(x):(x-2)$ και $P(x):(x+2)$ είναι ίσα $\rightarrow$.

  $P(2)=P(-2)\Leftrightarrow8+4\beta+2\gamma+\delta=-8+4\beta-2\gamma+\delta\Leftrightarrow4\gamma=-16\Leftrightarrow\gamma=-4$

Αντικαθιστώ στις σχέσεις (1) και (2) το $\gamma=-4$ και έχω το παρακάτω σύστημα:

$$\begin{cases}\beta+\delta=3\\ 9\beta+\delta=-13\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\delta=3-\beta\\ 9\beta+3-\beta=-13\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\delta=3-\beta\\ 8\beta=-16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\delta=5\\ \beta=-2\end{cases}.$$

Επομένως,

$$P(x)=x^3-2x^2-4x+5.$$

Δ2. Λύνω την εξίσωση:

$P(x)=x-1\Leftrightarrow x^3-2x^2-4x+5=x-1\Leftrightarrow x^3-2x^2-5x+6=0$

Με τη βοήθεια του σχήματος Χόρνερ καταλήγω:

$(x-1)\cdot(x^2-x-6)=0\Leftrightarrow x=1$ ή $x=-2$ ή $x=3$.

Αντικαθιστώντας στην ευθεία: $y=x-1$ και καταλήγω ότι τα σημεία τομής είναι:

$A(1,0)$ $\quad B(-2,-3)$ $\quad \Gamma(3,2)$

Δ3. Αν $\pi(x)$ και $\upsilon(x)$ είναι αντίστοιχα το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο $Q(x)=(x^2-3x+2)$ τότε έχουμε:

$$\pi(x)=x+1 \text{ και } U(x)=-3x+3$$

$$\frac{2x}{\upsilon(x)}<\frac{1}{\pi(x)}\Leftrightarrow\frac{2x}{-3x+3}<\frac{1}{x+1}\Leftrightarrow\frac{2x}{-3x+3}-\frac{1}{x+1}<0\Leftrightarrow\frac{2x^2+5x-3}{(-3x+3)(x+1)}<0\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow(2x^2+5x-3)(-3x+3)(x+1)<0$ με $x\neq-1$ και $x\neq1$. (

Από την επίλυσης την ανίσωσης με πινακάκι έχουμε ότι:

Η λύση της ανίσωσης είναι: $x\in(-\infty,-3)\cup\left(-1,\frac{1}{2}\right)\cup(1,+\infty)$

Δ4.

$$\sqrt{\frac{P(x)+3x-3}{Q(x)}}=1-x \Leftrightarrow \sqrt{x+1}=1-x \quad (*)$$

έχω τους περιορισμούς:

$$\begin{cases} x+1\geq 0 \\ 1-x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -1 \\ x\leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1\leq x\leq 1$$

Υψώνω τη σχέση (*) στο τετράγωνο και έχω:

$$x+1=1-2x+x^2 \Leftrightarrow x^2-3x=0 \Leftrightarrow$$

$$x=0\left(\text{Δεκτή}\right) \text{ ή } x=3 \text{ (Απορρίπτεται)}$$