ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2021

Β΄ ΦΑΣΗ

Ε_3.Μλ1Α(α)

ΤΑΞΗ: Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ

Ημερομηνία: Μ. Τετάρτη 28 Απριλίου 2021
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Α1. **Σχολικό βιβλίο σελίδα 90**

Α2.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1			
1	**2**	**3**	**4**
Γ	**Α**	**Δ**	**Β**

Α3. **(α) Σωστό**
(β) Σωστό
(γ) Σωστό
(δ) Λάθος
(ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1.

Η διακρίνουσα του τριωνύμου x^2-6x+5 είναι

$\Delta=(-6)^2-4\cdot1\cdot5 \Leftrightarrow \Delta=36-20 \Leftrightarrow \Delta=16$ επομένως το τριώνυμο έχει δύο ρίζες

πραγματικές και άνισες τις $x=\dfrac{-(-6)\pm\sqrt{16}}{2\cdot1}=\dfrac{6\pm4}{2}\begin{cases} x=5 \\ \text{ή} \\ x=1 \end{cases}$, και το πρόσημό του

φαίνεται στον πίνακα που ακολουθεί :

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
x^2-5x+6		+	0	-	0	+	

Οπότε $x^2-6x+5>0$ όταν $x\in(-\infty,1)\cup(5,+\infty)$

Β2.

Η ανίσωση $|2x+4|\le 16$ ισοδύναμα γίνεται :

$$|2x+4|\le 16 \Leftrightarrow -16\le 2x+4\le 16 \Leftrightarrow -16-4\le 2x+4-4\le 16-4 \Leftrightarrow -20\le 2x\le 12 \Leftrightarrow -10\le x\le 6$$

Ο αριθμός $\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}+\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$ υπολογίζεται ως εξής :

$$\alpha=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)\cdot\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)}+\frac{\sqrt{7}\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)\cdot\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{35}-\sqrt{5}^2}{\sqrt{7}^2-\sqrt{5}^2}+\frac{\sqrt{7}^2+\sqrt{35}}{\sqrt{7}^2-\sqrt{5}^2}=\frac{\sqrt{35}-5}{2}+\frac{7+\sqrt{35}}{2}=\frac{2\sqrt{35}+2}{2}=\frac{2(\sqrt{35}+1)}{2}=1+\sqrt{35}$$

Άρα ο αριθμός $\alpha=1+\sqrt{35}$ **δεν** ανήκει στο σύνολο λύσεων της ανίσωσης $|2x+4|\le 16$

Β3.

Έχουμε :

$$x^2-7|x|+12=0 \Leftrightarrow |x|^2-7|x|+12=0$$

Θέτουμε $|x|=w\ge 0$ άρα $w^2-7w+12=0$, η οποία έχει ρίζες τους αριθμούς 3 και 4

Άρα $|x|=3 \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ \text{ή} \\ x=-3 \end{cases}$ και $|x|=4 \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ \text{ή} \\ x=-4 \end{cases}$

Από τις 4 λύσεις που βρήκαμε μόνο η $x=-3$ και η $x=-4$ ανήκουν στο σύνολο λύσεων της

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Εφόσον η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(\alpha+1,4)$ τότε ισχύει :

$$f(\alpha+1)=4 \Leftrightarrow \frac{(\alpha+1)^2+\alpha(\alpha+1)-2}{\alpha+1-\alpha}=4 \Leftrightarrow \alpha^2+2\alpha+1+\alpha^2+\alpha-2=4$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha^2+3\alpha-5=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=1 \\ \text{ή} \\ \alpha=-\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

Από υπόθεση όμως $\alpha>0$ οπότε η λύση $\alpha=1$ είναι δεκτή ενώ η $\alpha=-\frac{5}{2}$ απορρίπτεται

Για $\alpha=1$ η συνάρτηση είναι $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$ και για να ορίζεται πρέπει $x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$

Άρα $A=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$

Γ2.

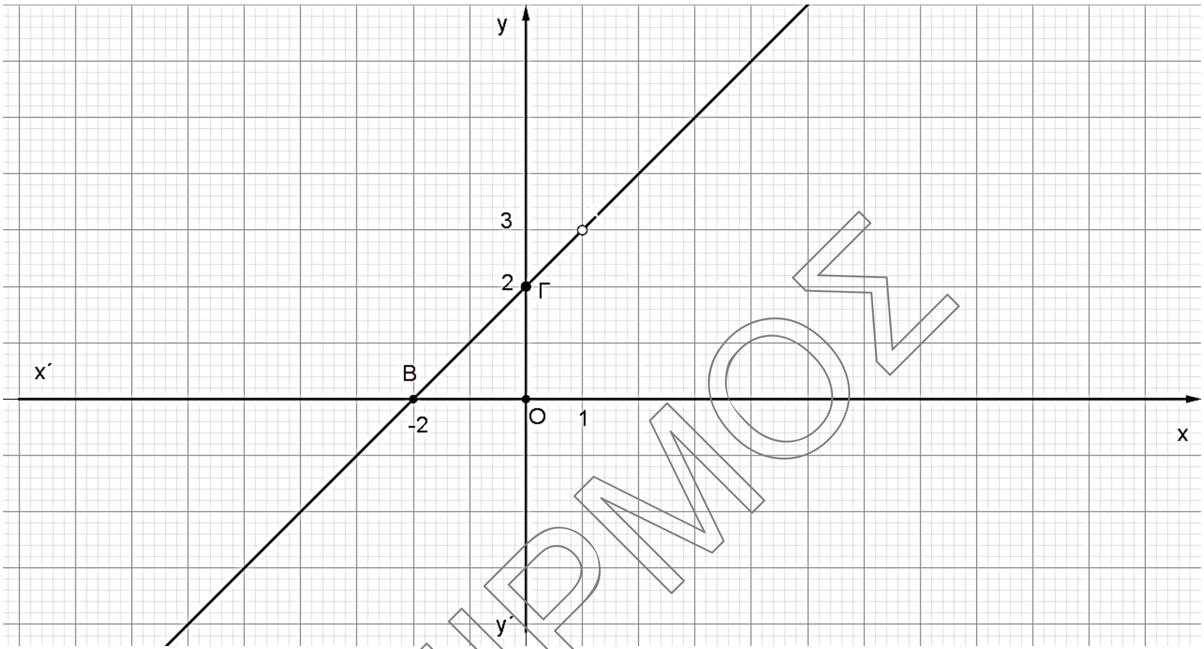
(i) Για κάθε $x\neq 1$ έχουμε : $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x-1}=\dfrac{(x-1)(x+2)}{x-1}=x+2$

Άρα $f(x)=x+2, x\in A$

Για να βρούμε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $x'x$ αρκεί να λύσουμε την εξίσωση $f(x)=0 \Leftrightarrow x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$

Άρα τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B(-2,0)$, επειδή ο αριθμό 0 ανήκει στο πεδίο ορισμού της τότε τέμνει και τον άξονα $y'y$ στο σημείο $\Gamma(0,f(0))$ δηλαδή στο σημείο $\Gamma(0,2)$

(ii) Η γραφική παράσταση της f είναι ευθεία η οποία διέρχεται από τα σημεία B και Γ με εξαίρεση το σημείο $(1,3)$, η γραφική της παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα :



Γ3.

$\left(f(x)-2\right)^4+3\left(f(x)-2\right)^2-4=0 \Leftrightarrow (x+2-2)^4+3(x+2-2)^2-4=0$

$\Leftrightarrow x^4+3x^2-4=0$, θέτουμε $x^2=w\geq 0$ άρα $w^2+3w-4=0$ η οποία έχει ρίζες τους αριθμούς -4 και 1 από τις οποίες η $w=-4$ απορρίπτεται λόγω περιορισμού

Άρα $x^2=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ ή \\ x=-1 \end{cases}$, όμως $x\in A=\mathbb{R}-\{1\}$ οπότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση την

$x=-1$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

(i) Για το τριώνυμο $(\lambda-2)x^2-2\lambda x+2\lambda-3$, $x\in\mathbb{R}$ και $\lambda\in\mathbb{R}-\{2\}$ μια παράμετρος

$$\Delta=(-2\lambda)^2-4\cdot(\lambda-2)\cdot(2\lambda-3)=4\lambda^2-4\left(2\lambda^2-3\lambda-4\lambda+6\right)$$

$$=4\lambda^2-4\left(2\lambda^2-7\lambda+6\right)=4\lambda^2-8\lambda^2+28\lambda-24=-4\lambda^2+28\lambda-24$$

(ii) Για να έχει η εξίσωση $(\lambda-2)x^2-2\lambda x+2\lambda-3=0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες πρέπει $\boxed{\Delta>0}$ δηλαδή $-4\lambda^2+28\lambda-24>0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda^2-7\lambda+6<0}$, επομένως θα βρούμε το πρόσημο του τριωνύμου $\lambda^2-7\lambda+6$, με $\lambda\neq 2$ και θα κρατήσουμε το διάστημα στο οποίο είναι αρνητικό .

Το τριώνυμο $\lambda^2-7\lambda+6$ έχει ρίζες τους αριθμούς 1 και 6 και το πρόσημο του με τον περιορισμό $\lambda\neq 2$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

λ	$-\infty$		1		2		6		$+\infty$
λ^2-7x+6		+	0	-	‖	-	0	+	

Άρα $\lambda(1,2)\cup(2,6)$

Δ2. Για να ισχύει $(\lambda-2)x^2-2\lambda x+2\lambda-3>0$ για κάθε $x\in R$ πρέπει :

$\Delta<0$ και $\lambda-2>0$ δηλαδή : $-4\lambda^2+28\lambda-24<0\Leftrightarrow \boxed{\lambda^2-7\lambda+6>0}$ και $\boxed{\lambda>2}$

Επομένως $\lambda<1$ **ή** $\lambda>6$ **και** $\lambda>2$, συναληθεύοντας προκύπτει $\lambda>6$

Δ3.

$$x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}=\left(\frac{2\lambda}{(2-\lambda)^2}\right)\Leftrightarrow(x_1+x_2)^2-2x_1\cdot x_2=\frac{2\lambda}{(2-\lambda)^2}\overset{(*)}{\Leftrightarrow}\left(\frac{2\lambda}{\lambda-2}\right)^2-2\frac{2\lambda-3}{\lambda-2}=\frac{2\lambda}{(\lambda-2)^2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{4\lambda^2}{(\lambda-2)^2}-\frac{4\lambda-6}{\lambda-2}=\frac{2\lambda}{(\lambda-2)^2}\Leftrightarrow 4\lambda^2-(\lambda-2)(4\lambda-6)=2\lambda\Leftrightarrow 4\lambda^2-\left(4\lambda^2-6\lambda-8\lambda+12\right)=2\lambda$$

$$4\lambda^2-4\lambda^2+14\lambda-12=2\lambda\Leftrightarrow 12\lambda=12\Leftrightarrow\lambda=1$$

$(*)$ Στο τριώνυμο $(\lambda-2)x^2-2\lambda x+2\lambda-3$, έχουμε $\alpha=\lambda-2,\beta=-2\lambda,\gamma=2\lambda-3$ και

$S=x_1+x_2=-\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{2\lambda}{\lambda-2}$, $P=x_1\cdot x_2=\dfrac{\gamma}{\alpha}=\dfrac{2\lambda-3}{\lambda-2}$