



ΤΑΞΗ: Γ' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Κυριακή 24 Μαΐου 2020
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$, δηλαδή $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.

Μονάδες 8

A2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Rolle και να κάνετε ένα σχήμα που να το ερμηνεύει γεωμετρικά.

Μονάδες 4

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 1$.

β) Έστω μία συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) \neq f(\beta)$ τότε, για κάθε

αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε, $f(x_0) = \eta$.

γ) Έστω οι παραγωγίσιμες στο \mathbb{R} συναρτήσεις f και g . Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει πάντοτε η ισοδυναμία: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f'(x) = g'(x)$.

δ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x \mid \sin x = 0\}$ ισχύει $(\epsilon\phi x)' = \frac{1}{\sin^2 x}$.

Μονάδες 8

A4. Έστω ο ισχυρισμός:

Υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοια, ώστε $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^*$.

Να εξετάσετε αν είναι Αληθής ή Ψευδής.

Μονάδες 2

Να τεκμηριώσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^{x-1} - 1)$.

B1. Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A = (1, +\infty)$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

Μονάδες 6

B2. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και ότι $f^{-1}(x) = \ln(e^x + 1) + 1$.

Μονάδες 6

B3. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει $\rho \in A$ τέτοιος, ώστε $f^{-1}(\ln(e^{\rho-1} - 1)) = \rho^2 - \rho + 1$.

Μονάδες 7

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2020
Β' ΦΑΣΗ

Ε_3.Μλ3ΘΟ(ε)

- Β4.** Να αποδείξετε ότι για την f^{-1} ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο διάστημα $[-1,1]$ και στη συνέχεια να βρείτε την τιμή του ξ , του συμπεράσματος του Θεωρήματος.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 2x - 2x \ln x - 3, x \in (0, +\infty)$.

- Γ1.** Να βρείτε το πρόσημο της f .

Μονάδες 5

Να αποδείξετε ότι:

- Γ2. α.** $f(x) > 2x - 3, x \in (0, +\infty)$.

Μονάδες 5

- β.** Η εξίσωση $f(x) = 2020$ έχει μοναδική λύση.

Μονάδες 3

- Γ3.** Από το σημείο $A(0, -2)$ μπορούμε να φέρουμε προς τη γραφική παράσταση της f , ακριβώς μια εφαπτομένη, την οποία και να βρείτε.

Μονάδες 5

- Γ4.** Υπάρχουν ακριβώς δύο παραγωγίσιμες στο $(0, +\infty)$ συναρτήσεις F , ώστε $F^2(x) = f^2(x)$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , για την οποία ισχύει:

$$f''(x) - f(x) = 2e^x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ με } f(0) = -1, f'(0) = 2.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = xe^x - e^{-x}, x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 7

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f έχει μία μόνο ρίζα.

Μονάδες 6

Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση $g(x) = (x-1)e^x + e^{-x}, x \in \mathbb{R}$.

Δ3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g εκτός της προφανούς ρίζας 0, έχει μόνο μία ακόμη ρίζα.

Μονάδες 6

Δ4. Ένα υλικό σημείο M ξεκινά τη χρονική στιγμή $t = 0 \text{ sec}$, από το σημείο $A(-2, g(-2))$ και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = g(x)$, με $x = x(t)$ και $y = y(t), t \geq 0 \text{ sec}$. Ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του είναι $x'(t) = 2$ μονάδες μήκους ανά sec. Να βρείτε τη χρονική στιγμή στην οποία ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του είναι $y'(t) = -2$ μονάδες μήκους ανά sec.

Μονάδες 6