



**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2020**  
Β' ΦΑΣΗ

**E\_3.Μλ3ΘΟ(α2)**

**ΤΑΞΗ:** Γ' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
**ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ:** ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ  
ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ  
**ΜΑΘΗΜΑ:** ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΑΠΟΦΟΙΤΟΙ

**Ημερομηνία: Κυριακή 24 Μαΐου 2020**  
**Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες**

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελίδα 133

**A2. (i) α)** Δεν υπάρχει το όριο της στο  $x_0$  ή

β) Υπάρχει το όριο της στο  $x_0$  αλλά είναι διαφορετικό από την τιμή της  $f(x_0)$  στο σημείο  $x_0$

**(ii)** Σελίδα 185 σχολικού βιβλίου ορισμός.

**A3.** Ο ισχυρισμός είναι ψευδής για παράδειγμα η συνάρτηση  $f(x) = e^x$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$  αλλά δεν έχει ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο

**A4.**

- (α)** Σωστό
- (β)** Σωστό
- (γ)** Λάθος
- (δ)** Λάθος
- (ε)** Λάθος

**ΘΕΜΑ Β**

**B1.** Εφόσον η  $f$  συνεχής στο  $\mathbb{R}$  θα είναι συνεχής και στο  $x = 0$ , επομένως

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \quad (1)$$

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + \alpha^2) = \alpha^2$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{-x} + 2\alpha - 2) = 2\alpha - 1$
- $f(0) = \alpha^2$

Λόγω της (1) :  $\alpha^2 = 2\alpha - 1 \Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow (\alpha - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$

$$\text{Άρα } f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 0 \\ e^{-x} & x > 0 \end{cases}$$

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-e^{-x}) = -1$

Άρα η  $f$  δεν είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 0$  το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της άρα είναι κρίσιμο σημείο.

**B2. (i)** Η  $f$  παραγωγίσιμη στο διάστημα  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$  με  $f'(x) = \begin{cases} 2x, & x < 0 \\ -e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$

Για  $x < 0$  έχουμε  $f'(x) = 2 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$  απορρίπτεται .

Για  $x > 0$  έχουμε  $-e^{-x} = 2 \Leftrightarrow e^{-x} = -2$  αδύνατη .

**(ii)** Για κάθε  $x < 0$  έχουμε  $f'(x) < 0$  και επειδή η  $f$  συνεχής στο  $x = 0$  θα είναι γνησίως φθίνουσα στο  $A_1 = (-\infty, 0]$  και το σύνολο τιμών της θα είναι

$$f(A_1) = \left[ f(0), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = [1, +\infty)$$

Για κάθε  $x > 0$   $f'(x) < 0$  και επειδή η  $f$  συνεχής στο  $x_0 = 0$  θα είναι γνησίως φθίνουσα στο  $A_2 = [0, +\infty)$  και το σύνολο τιμών της θα είναι

$$f(A_2) = \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(0) \right] = (0, 1]$$

Επομένως το σύνολο τιμών της  $f$  είναι το διάστημα  $(0, +\infty)$

**B3.** Η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το πεδίο ορισμού της άρα είναι 1-1 οπότε αντιστρέφεται.

Η εξίσωση  $y = x^2 + 1$  με  $x \leq 0$  και  $y \in [1, +\infty)$  ισοδύναμα γίνεται :

$$x^2 = y - 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{y - 1} \Leftrightarrow |x| = \sqrt{y - 1} \Leftrightarrow -x = \sqrt{y - 1} \Leftrightarrow x = -\sqrt{y - 1}$$

Η εξίσωση  $y = e^{-x}$  με  $x > 0$  και  $y \in (0, 1)$  ισοδύναμα γίνεται :

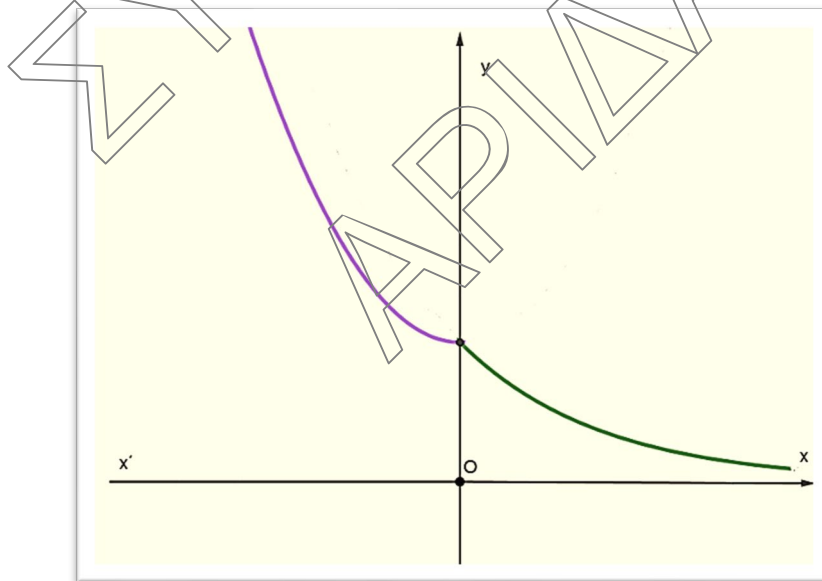
$$y = e^{-x} \Leftrightarrow -x = \ln y \Leftrightarrow x = -\ln y$$

Άρα η αντίστροφη της  $f$  είναι :  $f^{-1}(x) = \begin{cases} -\ln x, & 0 < x < 1 \\ -\sqrt{x-1}, & x \geq 1 \end{cases}$

**B4.** Για την  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 0 \\ e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$  ισχύει ότι  $f(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  επομένως το

ζητούμενο εμβαδόν είναι :

$$E(\Omega) = \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 (x^2 + 1) dx + \int_0^1 e^{-x} dx = \left[ \frac{x^3}{3} + x \right]_{-1}^0 + \left[ -e^{-x} \right]_0^1 = \frac{7}{3} - \frac{1}{e} \text{ τ.μ.}$$



**ΘΕΜΑ Γ**

**Γ1.** Η  $f$  παραγωγίσιμη στο  $A = (0, +\infty)$  με  $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} > 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow 0 < x < e$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x > 1 \Leftrightarrow x > e$$

Η  $f$  γνησίως αύξουσα στο  $A_1 = (0, e]$  και γνησίως φθίνουσα στο  $A_2 = [e, +\infty)$  ενώ στη θέση  $x = e$  έχει μέγιστο το  $f(e) = \frac{1}{e}$

Βρίσκοντας την  $f''$  έχουμε:  $f''(x) = \frac{2 \ln x - 3}{x^3}$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2 \ln x - 3}{x^3} = 0 \Leftrightarrow 2 \ln x - 3 = 0 \Leftrightarrow 2 \ln x = 3 \Leftrightarrow \ln x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = e^{\frac{3}{2}}$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2 \ln x - 3}{x^3} > 0 \Leftrightarrow 2 \ln x - 3 > 0 \Leftrightarrow 2 \ln x > 3 \Leftrightarrow \ln x > \frac{3}{2} \Leftrightarrow x > e^{\frac{3}{2}}$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{2 \ln x - 3}{x^3} < 0 \Leftrightarrow 2 \ln x - 3 < 0 \Leftrightarrow 2 \ln x < 3 \Leftrightarrow \ln x < \frac{3}{2} \Leftrightarrow x < e^{\frac{3}{2}}$$

Άρα η  $f$  κοίλη στο  $(0, e^{\frac{3}{2}}]$  και κοίλη στο  $[e^{\frac{3}{2}}, +\infty)$  ενώ το σημείο  $(e^{\frac{3}{2}}, f(e^{\frac{3}{2}}))$  ή

$(e^{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}})$  είναι το σημείο καμπής της.

**Γ2.** Η εξίσωση  $g(x) = h(x)$  ορίζεται στο  $(0, +\infty)$  άρα

$$e^x = x^e \Leftrightarrow x = \ln x^e \Leftrightarrow x = e \ln x \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = \frac{1}{e} \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{e} \Leftrightarrow x = e$$

Ισχύει  $f(x) \leq f(e)$  για κάθε  $x > 0$  και η ισότητα ισχύει για  $x = e$

Οι συναρτήσεις  $g, h$  είναι παραγωγίσιμες στο  $(0, +\infty)$  με  $g'(x) = e^x$  και  $h'(x) = ex^{e-1}$

και στο κοινό τους σημείο έχουμε:  $g'(e) = e^e$  και  $h'(e) = e \cdot e^{e-1} = e^e$

Δηλαδή οι  $C_g, C_h$  έχουν κοινό σημείο με τετμημένη  $x = e$  και  $g'(e) = h'(e)$  οπότε έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο.

**Γ3.** Θεωρούμε  $\varphi(x) = (f(3) - f(2))(e^{x+1} - e) + (x-1)(1 - ef(x))$  με  $x \in (0, +\infty)$

Ισχύει:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = -\infty$  διότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (f(3) - f(2))(e^{x+1} - e) = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$$

$$\text{Άρα: } \lim_{x \rightarrow 0^+} (x-1)(1 - ef(x)) = (-1) \cdot [1 - (-\infty)] = (-1) \cdot (+\infty) = -\infty$$

Δηλαδή:  $\varphi(x) < 0$  για τιμές του  $x$  κοντά στο μηδέν άρα θα υπάρξει  $x_1 > 0$  τέτοιο ώστε  $\varphi(x_1) < 0$

$$\text{Επίσης } \varphi(1) = (f(3) - f(2))(e^2 - e) = \left(\frac{\ln 3}{3} - \frac{\ln 2}{2}\right)(e^2 - e) > 0$$

$$\text{Διότι } \frac{\ln 3}{3} - \frac{\ln 2}{2} = \frac{2\ln 3 - 3\ln 2}{6} = \frac{\ln 9 - \ln 8}{6} > 0 \text{ και } e^2 - e > 0$$

Άρα η  $\varphi$  είναι συνεχής στο  $[x_1, 1] \subseteq (0, +\infty)$  και  $\varphi(x_1) \cdot \varphi(1) < 0$  οπότε από θεώρημα Bolzano υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης  $\varphi(x) = 0$  στο  $(0, 1)$

**Γ4.** Να βρεθεί ο  $v \in \mathbb{N}$  με  $v > 3$  ώστε  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(v^2 x)}{2^v x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2020^{f(x)} + 2021^{f(x)}}{2020^{f(x)} - 2021^{f(x)}}$

Για το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(v^2 x)}{2^v x}$  κάνουμε την αντικατάσταση  $u = v^2 x$  άρα όταν  $x \rightarrow 0$  τότε  $u \rightarrow 0$

$$\text{Επομένως το όριο γίνεται: } \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{2^v \frac{u}{v^2}} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{v^2 \cdot \eta\mu u}{2^v u} = \frac{v^2}{2^v} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} = \frac{v^2}{2^v}$$

$$\text{Για το } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2020^{f(x)} + 2021^{f(x)}}{2020^{f(x)} - 2021^{f(x)}} \text{ θέτουμε } u = f(x), \quad u_0 = \lim_{x \rightarrow 0} u = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2020^{f(x)} + 2021^{f(x)}}{2020^{f(x)} - 2021^{f(x)}} = \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{2020^u + 2021^u}{2020^u - 2021^u} = \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{1 + \left(\frac{2021}{2020}\right)^u}{1 - \left(\frac{2021}{2020}\right)^u} = 1$$

Άρα  $\frac{v^2}{2^v} = 1 \Leftrightarrow v^2 = 2^v \Leftrightarrow v = 4$  διότι

Για  $x > 3$  έχουμε :

$$x^2 = 2^x \Leftrightarrow \ln x^2 = \ln 2^x \Leftrightarrow 2 \ln x = x \ln 2 \Leftrightarrow f(x) = \frac{\ln 2}{2} \Leftrightarrow f(x) = \frac{2 \cdot \ln 2}{4} \Leftrightarrow f(x) = f(4)$$

Στο διάστημα  $(3, +\infty)$  η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα άρα  $f(x) = f(4) \Leftrightarrow x = 4$

$$I = \int_4^5 (x+4)f(x+4)dx, \text{ θέτουμε } u = x+4 \text{ άρα } du = dx \text{ και για } x = 4 \text{ και } x = 5$$

έχουμε  $u = 8$  και  $u = 9$  αντίστοιχα οπότε το ολοκλήρωμα γίνεται

$$I = \int_8^9 uf(u) du = \int_8^9 \ln u \cdot u du = [u \ln u - u]_8^9 = 9 \ln 9 - 9 - 8 \ln 8 + 8 = 9 \ln 9 - 8 \ln 8 - 1$$

### ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1-h)}{2h} &= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1-h) - f(1) + f(1)}{h} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{f(1+h) - f(1)}{h} - \frac{f(1-h) - f(1)}{h} \right) = f'(1) \end{aligned}$$

Διότι :  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = f'(1)$

και  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1)}{h} = -f'(1)$  αφού αντικαθιστώντας  $u = -h$  προκύπτει

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1)}{h} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(1+u) - f(1)}{-u} = -\lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(1+u) - f(1)}{u} = -f'(1)$$

Επίσης θέτουμε  $h(x) = \frac{f(x)g(x) - x^2}{x-1}, x \neq 1$  με  $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = f'(1)$

$(x-1)h(x)+x^2 = f(x)g(x)$ , ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 1 > 0$  κοντά στο 1 άρα

$$g(x) = \frac{(x-1)h(x)+x^2}{f(x)} \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 1 \text{ και επειδή η } g \text{ συνεχής ισχύει } g(1) = 1$$

Για το όριο  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)g(x)-x^2}{x-1}$  έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)g(x)-x^2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{f(x)g(x)-x^2-g(x)+g(x)}{x-1} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{g(x)(f(x)-1)}{x-1} + \frac{g(x)-x^2}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{g(x)(f(x)-1)}{x-1} + \frac{g(x)-x^2+1-1}{x-1} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{g(x)(f(x)-1)}{x-1} + \frac{g(x)-1}{x-1} \cdot \frac{x^2-1}{x-1} \right) = g(1)f'(1) + g'(1) - 2 = f'(1) + g'(1) - 2$$

**Άρα**  $f'(1) = f'(1) + g'(1) - 2 \Leftrightarrow g'(1) = 2$

**Β-τρόπος**

Το όριο  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)-x^2}{x-1}$  υπολογίζεται και με τον κανόνα del' hospital

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)-x^2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}} = \lim_{x \rightarrow 1} (g'(x) - 2x) = g'(1) - 2$$

**(β)** Η εξίσωση εφαπτομένης της  $g$  στο σημείο  $A(1, g(1))$  είναι η  $y = 2x - 1$  και επειδή η  $g$  κοίλη ισχύει  $g(x) \leq 2x - 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  με την ισότητα να ισχύει για  $x = 1$

Δ2.

Η  $f$  ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στα διαστήματα  $[-1,0]$  και  $[0,1]$

Άρα υπάρχουν  $\xi_1 \in (-1,0)$  και  $\xi_2 \in (0,1)$  τέτοια ώστε :

$$f'(\xi_1) = \frac{f(0) - f(-1)}{0 - (-1)} \Leftrightarrow f'(\xi_1) = f(0) + 1$$

και

$$f'(\xi_2) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} \Leftrightarrow f'(\xi_2) = 1 - f(0)$$

Όμως  $f'(x) \geq 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  άρα

$$f'(\xi_1) \geq 1 \Leftrightarrow f(0) + 1 \geq 1 \Leftrightarrow f(0) \geq 0 \quad \text{και} \quad f'(\xi_2) \geq 1 \Leftrightarrow 1 - f(0) \geq 1 \Leftrightarrow f(0) \leq 0$$

Άρα  $f(0) = 0$

Δ3.

Για  $x=0$  η εξίσωση αληθεύει, θεωρούμε τη συνάρτηση  $h(x) = 2x - f(x) - g(x+1) + 1$  με πεδίο ορισμού  $A = (-\infty, 0]$  η οποία είναι παραγωγίσιμη στο  $(-\infty, 0)$  με

$h'(x) = -f'(x) + 2 - g'(x+1)$ , όμως  $h'(x) < 0$  για κάθε  $x \in (-\infty, 0)$  διότι :

- Ισχύει  $f'(x) \geq 1 \Leftrightarrow -f'(x) \leq -1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  άρα και  $-f'(x) < 0$  για κάθε  $x \in (-\infty, 0)$
- Ισχύει  $g''(x) < 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  άρα η  $g'$  γνησίως φθίνουσα.

$$x < 0 \Leftrightarrow x+1 < 1 \Leftrightarrow g'(x+1) > g'(1) \Leftrightarrow g'(x+1) > 2 \Leftrightarrow 2 - g'(x+1) < 0$$

Άρα η  $h$  γνησίως φθίνουσα στο  $(-\infty, 0]$  και  $x < 0 \Leftrightarrow h(x) > h(0) \Leftrightarrow h(x) > 0$

Επομένως η εξίσωση έχει στο διάστημα  $A = (-\infty, 0]$  μια μόνο λύση την  $x = 0$



Δ4. Ισχύει  $f'(x) \geq 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  άρα για  $x \in [1, 2]$  έχουμε  $x \cdot f'(x) \geq x \cdot 1$

$$\int_1^2 x \cdot f'(x) dx \geq \int_1^2 x dx \Rightarrow [xf(x)]_1^2 - \int_1^2 f(x) dx \geq \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2$$

$$\Rightarrow 2f(2) - f(1) - \int_1^2 f(x) dx \geq \frac{3}{2} \Rightarrow 2 \int_1^2 f(x) dx \leq 4f(2) - 5$$

ΣΥΝΕΙΡΜΟΝ  
ΑΡΙΔΑΙΑ