



2020 | Μάιος | Φάση 3 | Διαγωνίσματα Επανάληψης

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (Παλιό σύστημα)

Γ' Γενικού Λυκείου

Θετικών Σπουδών

Παρασκευή 22 Μαΐου 2020 | Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού.
- Μονάδες 3+4**
- A2.** Να δώσετε τον ορισμό του κρίσιμου σημείου
- Μονάδες 3**
- A3.** Δίνεται η παρακάτω πρόταση:
«Αν μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα Δ είναι γνησίως μονότονη, τότε ισχύει $f'(x) \neq 0$, για κάθε x εσωτερικό του Δ ».
- α)** Εξετάστε αν η πρόταση είναι **αληθής** ή **ψευδής**.
- Μονάδες 2**
- β)** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- Μονάδες 3**
- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.



2020 | Μάιος | Φάση 3 | Διαγωνίσματα Επανάληψης

α) Για τις συναρτήσεις f, g για τις οποίες ορίζεται η σύνθεση $g \circ f$, ισχύει ότι $D_{g \circ f} \subseteq D_f$.

Μονάδες 2

β) Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x}$.

Μονάδες 2

γ) Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε διάστημα (α, β) , τότε δεν παρουσιάζει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

Μονάδες 2

δ) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε διάστημα Δ και έχει δύο ρίζες στο διάστημα Δ , τότε και η παράγωγος f' έχει ρίζα στο εσωτερικό του Δ .

Μονάδες 2

ε) Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx$, τότε υποχρεωτικά $\alpha < \gamma < \beta$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha \cdot x^3}{x^2 - \beta}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$

• $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$

B1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta = 1$.

Μονάδες 8

B2. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 6

B3. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμψής.

Μονάδες 6



B4. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της f .

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο διάστημα $[-\pi, \pi]$ για την οποία ισχύει $x \cdot f'(x) = \sin x - f(x)$ για κάθε $x \in [-\pi, \pi]$ και παρουσιάζει στο σημείο $x_0 \in (-\pi, \pi)$ ακρότατο ίσο με 1.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $x_0 = 0$ και $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu x}{x}, & \text{αν } x \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi] \\ 1, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$.

Μονάδες 3+4

Γ2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-\pi, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0, \pi]$ και να βρείτε τα ακρότατα.

Μονάδες 6

Γ3. Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου Ω που βρίσκεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f , του άξονα x και των ευθειών $x = -\frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{3}$, τότε ισχύει

$$\text{ότι } \frac{3\sqrt{3}}{4} < E < \frac{\pi}{2}.$$

Μονάδες 6

Γ4. Θεωρούμε σημείο $M(x(t), y(t))$, όπου $t \geq 0$, το οποίο κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της f με $x(t) > 0$ και $x'(t) = \pi$ cm/sec. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης $y(t)$ του σημείου M όταν βρεθεί στη θέση $(\pi, 0)$.

Μονάδες 6



ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , για την οποία ισχύουν:

- $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = \frac{1}{e}$.
- F αρχική της f με $F(0) = 0$.
- $f'(x) \cdot \sqrt{x^2 + 1} = f(x) \cdot (\sqrt{x^2 + 1} - x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^{x - \sqrt{x^2 + 1}}$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 3+4

Δ2. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\ln\left(\frac{e^x}{\sin x}\right) = \sqrt{x^2 + 1}$ έχει μοναδική ρίζα στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Μονάδες 5

Δ3. Να λυθεί η εξίσωση $F(\eta\mu x) - F(x) = f(x) - f(\eta\mu x)$.

Μονάδες 6

Δ4. Να δείξετε ότι:

α) Το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της F , τους άξονες x' , y' και την ευθεία $x = e$ είναι μεγαλύτερο του $\frac{e}{2}$.

Μονάδες 4

β) $\int_0^e x \cdot f(x) dx < e \cdot \left(F(e) - \frac{1}{2}\right)$

Μονάδες 3