ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (Παλαιό σύστημα)

Γ' Γενικού Λυκείου

Θετικών Σπουδών

Παρασκευή 22 Μαΐου 2020 | Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία

Α2. Θεωρία

Α3. **α) Ψευδής**

β) Για αντιπαράδειγμα αναφέρουμε την f με $f(x)=x^3$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ αλλά δεν ισχύει $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, αφού $f'(x)=3x^2$, άρα για $x=0$ έχουμε $f'(0)=0$.

Α4. **α)** Σωστό.
β) Σωστό.
γ) Λάθος.
δ) Σωστό.
ε) Λάθος.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Ισχύει ότι

$$f(x)-x=\frac{\alpha x^3}{x^2-\beta}-x=\frac{\alpha x^3-x\left(x^2-\beta\right)}{x^2-\beta}\Rightarrow f(x)-x=\frac{(\alpha-1)x^3+\beta x}{x^2-\beta}$$

Διακρίνω περιπτώσεις για το $\alpha-1$

I) Αν $\alpha-1\neq 0 \Leftrightarrow \alpha\neq 1$ τότε έχω:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\alpha-1)x^3}{x^2}=(\alpha-1)(+\infty)=\begin{cases}+\infty & \text{αν} \quad \alpha-1>0\Leftrightarrow\alpha>1\\ -\infty & \text{αν} \quad \alpha-1<0\Leftrightarrow\alpha<1\end{cases}.$$

Άτοπο, αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=0$.

II) Αν $\alpha-1=0\Leftrightarrow\alpha=1$ τότε:

$$f(x)-x=\frac{x^3}{x^2-\beta}-x=\frac{x^3-x^3+\beta x}{x^2-\beta}\Rightarrow f(x)-x=\frac{\beta x}{x^2-\beta}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\beta x}{x^2\left(1-\frac{\beta}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{\beta}{1-\frac{\beta}{x}}\right)=0\cdot\frac{\beta}{1-0}=0$$

Άρα $\alpha=1$

Για $\alpha=1$ έχω:

$$f(x)=\frac{x^3}{x^2-\beta}\overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow}x^2-\beta=\frac{1}{f(x)}\cdot x^3\Rightarrow\lim_{x\to1^+}\left(x^2-\beta\right)=\lim_{x\to1^+}\left(\frac{1}{f(x)}\cdot x^3\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-\beta=0\cdot 1=0\Leftrightarrow\beta=1$$

αφού $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=+\infty$ άρα $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{1}{f(x)}=0$.

Β2. Έχουμε $f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}$, με $x\in(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$ και f παρ/μη στο D_f

με

$$f'(x)=\left(\frac{x^3}{x^2-1}\right)'=\frac{3x^2\left(x^2-1\right)-x^3\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{3x^4-3x^2-2x^4}{\left(x^2-1\right)^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{x^4-3x^2}{\left(x^2-1\right)^2}.$$

Αν $f'(x)=0 \Leftrightarrow x^4-3x^2=0 \Leftrightarrow x^2\left(x^2-3\right)=0 \Leftrightarrow x=0,\quad x=-\sqrt{3}$ ή $x=\sqrt{3}$.

Αν $f'(x)>0 \Leftrightarrow \dfrac{x^4-3x^2}{\left(x^2-1\right)^2}>0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2\left(x^2-3\right)\cdot\left(x^2-1\right)^2>0 \\ x\neq\pm1 \end{cases} \Leftrightarrow x^2\left(x^2-3\right)>0.$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$	$+\infty$
x^2	$+$		$+$	‖	$+$	0	$+$	‖	$+$		$+$
x^2-3	$+$	0	$-$	‖	$-$		$-$	‖	$-$	0	$+$
$x^2\left(x^2-3\right)$	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	ΤΜ	$\searrow$	‖	$\searrow$		$\searrow$	‖	$\searrow$	ΤΕ	$\nearrow$

Άρα $f\uparrow$ στο $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right]$ και $f\downarrow$ στο $\left[-\sqrt{3},-1\right)$

$f\downarrow$ στο $(-1,\ 1)$, $f\downarrow$ στο $\left(1,\sqrt{3}\right]$ και $f\uparrow$ στο $\left[\sqrt{3},+\infty\right)$ και παρουσιάζει για $x=-\sqrt{3}$ Τ.Μ. ίσο με $f\left(-\sqrt{3}\right)=\dfrac{-3\sqrt{3}}{2}$ και για $x=\sqrt{3}$ Τ.Ε. ίσο με $f\left(\sqrt{3}\right)=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

Β3. f 2 φορές παραγωγίσιμη με

$$f''(x)=\left(\frac{x^4-3x^2}{\left(x^2-1\right)^2}\right)'=\frac{\left(x^4-3x^2\right)'\cdot\left(x^2-1\right)^2-\left(x^4-3x^2\right)\cdot2\left(x^2-1\right)\cdot\left(x^2-1\right)'}{\left(x^2-1\right)^4}=$$

$$=\frac{\left(4x^3-6x\right)\cdot\left(x^2-1\right)-\left(x^4-3x^2\right)\cdot4x}{\left(x^2-1\right)^3}=\frac{4x^5-4x^3-6x^3+6x-4x^5+12x^3}{\left(x^2-1\right)^3}=$$

$$=\frac{2x^3+6x}{\left(x^2-1\right)^3}\Rightarrow f''(x)=\frac{2x\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-1\right)^3}.$$

Αν $f''(x)=0\Leftrightarrow \dfrac{2x\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-1\right)^3}=0\Leftrightarrow x=0.$

Αν $f''(x)>0\Leftrightarrow \dfrac{2x\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-1\right)^3}>0\Leftrightarrow 2x\left(x^2+3\right)\left(x^2-1\right)^3>0.\quad x\neq\pm1.$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
$\left(x^2-1\right)^3$		$+$	‖	$-$		$-$	‖	$+$	
$f''(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f(x)$		$\frown$	‖	$\smile$		$\frown$	‖	$\smile$	

Άρα f $\frown$ στο $(-\infty,-1)$, f $\smile$ στο $(-1,0)$, f $\frown$ στο $(0,1)$ και f $\smile$ στο $(1,+\infty)$, και το σημείο $(0, f(0))$ δηλ. το Ο $(0,0)$ είναι Σ.Κ. C_f.

Β4. Έχουμε ότι $y=x$ πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ και

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-x^3+x}{x^2-1}=0$$

$\Rightarrow$ $y=x$ πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

Η ευθεία $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη και

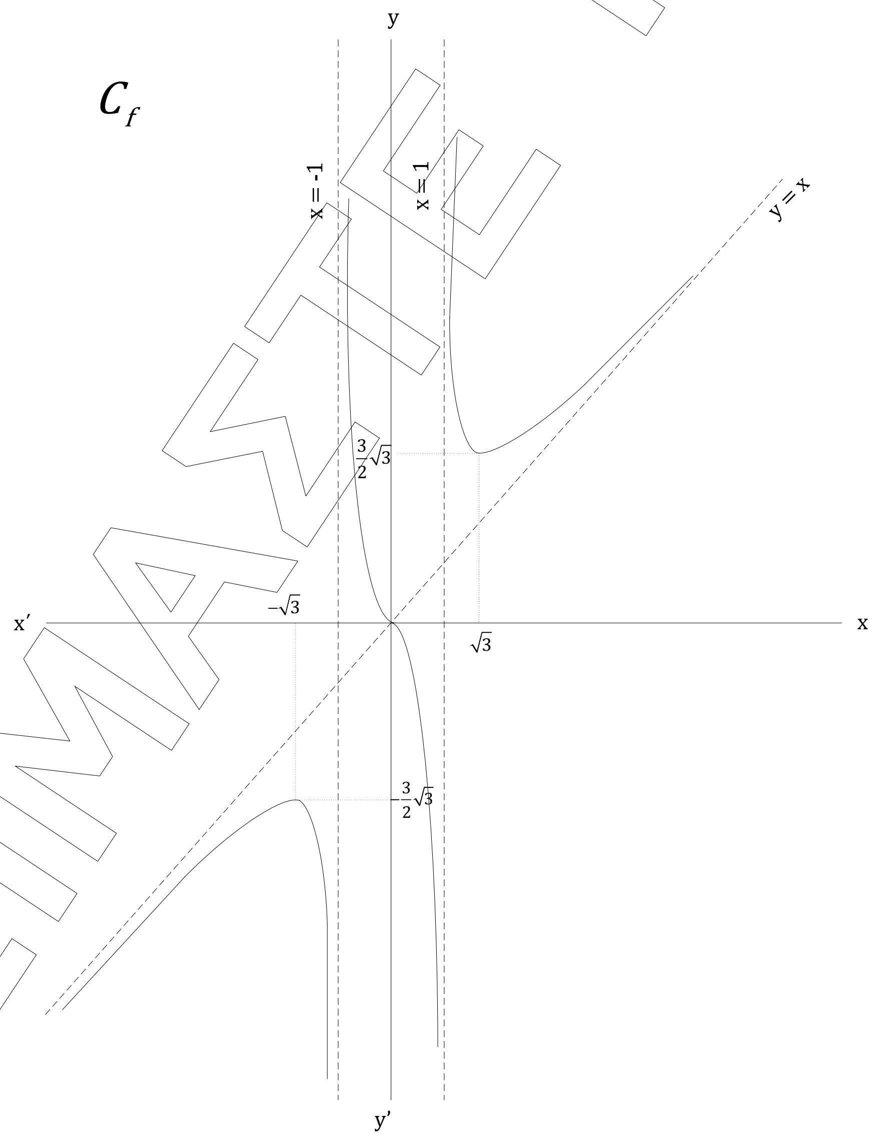
$$\lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^+}\left(\frac{1}{x+1}\cdot\frac{x^3}{x-1}\right)=(+\infty).\frac{-1}{-2}=+\infty.$$

Δηλ. $x=-1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Επιπλέον η C_f τέμνει τους xx', yy' στο $(0,0)$.

Άρα έχουμε:

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$		$-$	‖	$+$		$-$	‖	$+$		$+$	
$f(x)$			T M		‖		ΣΚ		‖		ΤΕ		



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αφού f παρ/μη στο $[-\pi,\pi]$ και στο $x_0\in(-\pi,\pi)$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο ίσο με 1, θα ισχύει από Θ. Fermat ότι $f'(x_0)=0$ και επιπλέον $f(x_0)=1$.

Αντικαθιστώντας στην αρχική σχέση έχουμε

$x_0\cdot f'(x_0)=\text{συν}x_0-f(x_0)\Leftrightarrow x_0\cdot 0=\text{συν}x_0-1\Leftrightarrow \text{συν}x_0=1$ και αφού

$x_0\in(-\pi,\pi)$ ισχύει ότι $x_0=0$.

Ακόμη έχουμε $x\cdot f'(x)+f(x)=\text{συν}x\Leftrightarrow (x\cdot f(x))'=(\text{ημ}x)'$ άρα από συνέπειες Θ.Μ.Τ. θα ισχύει ότι $x\cdot f(x)=\text{ημ}x+c$.

Για $x=0$ έχω: $0\cdot f(0)=\text{ημ}0+c\Leftrightarrow c=0$. Άρα $x\cdot f(x)=\text{ημ}x$.

Αν $x\in[-\pi,0)\cup(0,\pi]$ έχω: $f(x)=\dfrac{\text{ημ}x}{x}$.

Αφού f παρ/μη στο $[-\pi,\pi]$ έχουμε ότι η f είναι συνεχής στο $x=0$ δηλ. θα ισχύει ότι $f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\text{ημ}x}{x}=1$.

Άρα $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\text{ημ}x}{x}, & \text{αν}\quad x\in[-\pi,0)\cup(0,\pi]\\ 1, & \text{αν}\quad x=0\end{cases}$

Γ2. Αν $x\in[-\pi,0)\cup(0,\pi]$ ισχύει $f'(x)=\dfrac{\text{συν}x-x-\text{ημ}x}{x^2}$.

Θέτουμε $g(x)=\text{συν}x\cdot x-\text{ημ}x,\quad x\in[-\pi,\pi]$ και έχουμε

$g'(x)=-\text{ημ}x\cdot x+\text{συν}x-\text{συν}x=-x\cdot\text{ημ}x\Rightarrow g'(x)<0$ για κάθε $x\in(-\pi,\pi)$.

Δηλ. $g\downarrow$ στο $[-\pi,\pi]$. Άρα αν

$x\in[-\pi,0)$ δηλ. $x<0\Rightarrow g(x)>g(0)=0\Rightarrow g(x)>0$ οπότε

$f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}>0$ στο $[-\pi,0)$.

Άρα $f\uparrow$ στο $[-\pi,0]$.

Αν $x\in(0,\pi]$ δηλ. $x>0$ έχουμε

$g(x)<g(0)=0\Rightarrow g(x)<0$ άρα $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}<0$

στο $(0, \pi]$ ⇒ f↧ στο $[0, \pi]$.

x	$-\pi$	0	π
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗		↘

Άρα η f παρουσιάζει για $x = -\pi$ και $x = \pi$ ολικό ελάχιστο ίσο με $f(-\pi) = f(\pi)$ = 0 και για $x = 0$ ολικό μέγιστο ίσο με $f(0) = 1$.

Γ3. Ισχύει ότι $E = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} |f(x)|dx = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} f(x)dx$ αφού $f(x) \geq 0$ = για κάθε $x \in [-\pi, \pi]$

άρα και για $x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$.

Η f↥ στο $\left[-\frac{\pi}{6}, 0\right] \Rightarrow f\left(\left[-\frac{\pi}{6}, 0\right]\right) = \left[f\left(-\frac{\pi}{6}\right), f(0)\right] = \left[\frac{3}{\pi},\ 1\right]$ αφού

$$f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{-\frac{\pi}{6}} = \frac{-\eta\mu\frac{\pi}{6}}{-\frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\pi}{6}} = \frac{3}{\pi}.$$

Η f ↧ στο $\left[0, \frac{\pi}{3}\right] \Rightarrow f\left(\left[0, \frac{\pi}{3}\right]\right) = \left[f\left(\frac{\pi}{3}\right),\ f(0)\right] = \left[\frac{3\sqrt{3}}{2\pi},\ 1\right]$ αφού

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\eta\mu\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\pi}{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}.$$

Ισχύει ότι $\frac{3}{\pi} = \frac{3\cdot 2}{2\pi} > \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \Rightarrow f\left(-\frac{\pi}{6}\right) > f\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Άρα $f\left(\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]\right) = f\left(\left[-\frac{\pi}{6}, 0\right]\right) \cup f\left(\left[0, \frac{\pi}{3}\right]\right) = \left[f\left(\frac{\pi}{3}\right), f(0)\right] = \left[\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}, 1\right]$

Δηλ. $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \le f(x) \le 1$ για κάθε $x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ χωρίς να ισχύει παντού η ισότητα, άρα ισχύει ότι

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} dx < \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx < \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 1\, dx \Rightarrow \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{2} < E < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{3\sqrt{3}}{4} < E < \frac{\pi}{2}.$$

Γ4. Ισχύει $y(t) = f(x(t))$ άρα $y'(t) = f'(x(t)) \cdot x'(t) \Rightarrow$

$$\Rightarrow y'(t) = \frac{\sigma\upsilon\nu(x(t)) \cdot x'(t) \cdot x(t) - \eta\mu(x(t)) \cdot x'(t)}{x^2(t)}.$$

Για $t = t_0$ έχουμε $M(x(t_0), y(t_0)) \equiv (\pi, 0) \Rightarrow \begin{cases} x(t_0) = \pi \\ y(t_0) = 0 \end{cases}$ και

$x'(t_0) = x'(t) = \pi$ cm/sec.

Άρα $\Rightarrow y'(t_0) = \frac{\sigma\upsilon\nu(x(t_0)) \cdot x(t_0) - \eta\mu(x(t_0))}{x^2(t_0)} \cdot x'(t_0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow y'(t_0) = \frac{\text{συν}\pi - \text{ημ}\pi}{\pi^2} \cdot \pi \underset{\text{συν}\pi=-1}{\overset{\text{ημ}\pi=0}{\Rightarrow}} y'(t_0) = \frac{-\pi^2}{\pi^2} = -1\, cm/sec.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε ότι $f'(x) \cdot \sqrt{x^2+1} = f(x) \cdot \left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$

Διαιρούμε με $f(x) \cdot \sqrt{x^2+1} \neq 0$ και έχουμε

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\sqrt{x^2+1} - x}{\sqrt{x^2+1}} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \Leftrightarrow \left(\ln|f(x)|\right)' = \left(x - \sqrt{x^2+1}\right)',$$

οπότε από συνέπειες Θ.Μ.Τ. έχουμε

$\ln|f(x)| = x - \sqrt{x^2+1} + c$.

Για $x = 0$ έχω: $\ln|f(0)| = 0 - \sqrt{0^2+1} + c \Leftrightarrow \ln\frac{1}{e} = -1 + c \Leftrightarrow c = 0$.

Άρα $\ln|f(x)| = x - \sqrt{x^2+1}$

Επειδή f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ είναι και συνεχής και αφού $f(x) \neq 0$ η f θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

Όμως $f(0) = \dfrac{1}{e} > 0$ άρα $f(x) > 0,\ x \in \mathbb{R}$.

Άρα $\ln f(x) = x - \sqrt{x^2+1} \Rightarrow f(x) = e^{x-\sqrt{x^2+1}}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = e^{x-\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(x - \sqrt{x^2+1}\right)' = e^{x-\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) \Rightarrow f'(x) = e^{x-\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Όμως ισχύει $x^2+1 > x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| \geq x \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} > x$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα $f\uparrow$ στο $\mathbb{R}$.

Αφού f συνεχής στο $\mathbb{R}$ ισχύει ότι: $f(\mathbb{R}) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x),\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)$ όπου

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x-\sqrt{x^2+1}}$.

Θέτω $u = x - \sqrt{x^2+1}$ και έχω

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x - \sqrt{x^2+1}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left[x - |x|\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right] \overset{|x|=-x}{=} \lim_{x\to-\infty}\left[x\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)\right] = (-\infty)\cdot 2 = -\infty.$$

Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{u\to-\infty} e^u = 0$ και

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x - \sqrt{x^2+1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2 - \left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}{x+\sqrt{x^2+1}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2} - \cancel{x^2} - 1}{x + |x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \overset{|x|=x}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{x\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)} = 0\cdot\frac{1}{2} = 0.$$

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{u\to 0} e^u = e^0 = 1$. Οπότε $f(\mathbb{R}) = (0,1)$.

Δ2. Η εξίσωση $\ln\left(\dfrac{e^x}{\text{συν}x}\right)=\sqrt{x^2+1},\quad x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ γράφεται ισοδύναμα:

$\ln e^x-\ln(\text{συν}x)=\sqrt{x^2+1}\Leftrightarrow x-\sqrt{x^2+1}=\ln(\text{συν}x)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{x-\sqrt{x^2+1}}=\text{συν}x\Leftrightarrow f(x)=\text{συν}x\Leftrightarrow f(x)-\text{συν}x=0.$

Θεωρώ $h(x)=f(x)-\text{συν}x,\quad x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ και έχω ότι

$h'(x)=f'(x)+\text{ημ}x>0$ γιά κάθε $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, άρα $h\uparrow$ στο $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. Άρα

$h\left(\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\right)=\left(\lim\limits_{x\to0^+}h(x),\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}h(x)\right)=\left(\dfrac{1}{e}-1,f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$ αφού

$\lim\limits_{x\to0^+}h(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(f(x)-\text{συν}x\right)=f(0)-\text{συν}0=\dfrac{1}{e}-1$ και

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}h(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(f(x)-\text{συν}x\right)=f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)-\text{συν}\dfrac{\pi}{2}=f\left(\dfrac{\pi}{2}\right).$

Επειδή $\dfrac{1}{e}-1<0<f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ έχω ότι $0\in h\left(\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$ και αφού $h\uparrow$ στο $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ υπάρχει μοναδικό $\rho\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right):h(\rho)=0\Leftrightarrow f(\rho)=\text{συν}\rho$.

Άρα η εξίσωση $\ln\left(\dfrac{e^x}{\text{συν}x}\right)=\sqrt{x^2+1}$ έχει μοναδική ρίζα $\rho\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Δ3. Η εξίσωση $F(\text{ημ}x)-F(x)=f(x)-f(\text{ημ}x)$ γράφεται ισοδύναμα

$F(\text{ημ}x)+f(\text{ημ}x)=F(x)+f(x)\ \ (1)$.

Θεωρώ τη συνάρτηση $\varphi(x)=F(x)+f(x)$ με F, f παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ με

$F'(x)=f(x)>0$ και $f'(x)>0$.

Άρα $\varphi'(x)=F'(x)+f'(x)=f(x)+f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δηλαδή η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα είναι και 1–1.

Η εξίσωση (1) γράφεται: $\varphi(\text{ημ}x)=\varphi(x)\Leftrightarrow\text{ημ}x=x$ που ισχύει μόνο για $x=0$

(αφού $|\eta\mu x|\le|x|$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$).

Δ4. **α)** Αφού $F'(x)=f(x)>0$ έχουμε ότι $F\uparrow$ στο $\mathbb{R}$ και αφού $F(0)=0$ ισχύει ότι $F(x)\geq 0$ για κάθε $x\geq 0$ άρα $E=\int_0^e F(x)\mathrm{d}x$.

Αφού $F''(x)=f'(x)>0$ έχουμε ότι η F είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Επιπλέον η εφαπτομένη (ε) της C_F στο $(0, F(0))$ έχει εξίσωση:

$y-F(0)=F'(0)\cdot(x-0)$ όπου $F(0)=0$ και $F'(0)=f(0)=\frac{1}{e}$.

Άρα $(\varepsilon): y=\frac{1}{e}x$.

Αφού F κυρτή στο $\mathbb{R}$ έχουμε ότι $F(x)\geq\frac{1}{e}x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ χωρίς να ισχύει παντού η ισότητα, άρα

$$\int_0^e F(x)\mathrm{d}x>\int_0^e\frac{1}{e}x\,\mathrm{d}x\Leftrightarrow\int_0^e F(x)\mathrm{d}x>\frac{1}{e}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^e\Leftrightarrow\int_0^e F(x)\mathrm{d}x>\frac{e}{2}.$$

β) Ισχύει ότι

$$\int_0^e x\cdot f(x)\mathrm{d}x=\int_0^e x\cdot F'(x)\mathrm{d}x=\left[x\cdot F(x)\right]_0^e-\int_0^e x'\cdot F(x)\mathrm{d}x=e\cdot F(e)-\int_0^e F(x)\mathrm{d}x.$$

Από **α)**

$$\int_0^e F(x)\mathrm{d}x>\frac{e}{2}\Rightarrow-\int_0^e F(x)\mathrm{d}x<-\frac{e}{2}\Rightarrow e\cdot F(e)-\int_0^e F(x)\mathrm{d}x<e\cdot F(e)-\frac{e}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int_0^e x\cdot f(x)\mathrm{d}x<e\left(F(e)-\frac{1}{2}\right).$$