ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (Νέο σύστημα)

Γ' Γενικού Λυκείου

Θετικών Σπουδών

Παρασκευή 22 Μαΐου 2020 | Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών.

Μονάδες 7

Α2. Να δώσετε τον ορισμό του κρίσιμου σημείου.

Μονάδες 3

Α3. Δίνεται η παρακάτω πρόταση:

«Αν μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα Δ είναι γνησίως μονότονη τότε ισχύει $f'(x)\neq 0$, για κάθε x εσωτερικό του Δ».

α) Εξετάστε αν η πρόταση είναι **αληθής** ή **ψευδής**.

Μονάδες 2

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 3

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη ***Σωστό,*** αν η πρόταση είναι σωστή, ή ***Λάθος*** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για τις συναρτήσεις f, g για τις οποίες ορίζεται η σύνθεση $g\circ f$, ισχύει ότι $D_{g\circ f}\subseteq D_f$.

Μονάδες 2

β) Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}$.

Μονάδες 2

γ) Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε διάστημα (α,β), τότε δεν παρουσιάζει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

Μονάδες 2

δ) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε διάστημα Δ και έχει δύο ρίζες στο διάστημα Δ, τότε και η παράγωγος f' έχει ρίζα στο εσωτερικό του Δ.

Μονάδες 2

ε) Για κάθε ζεύγος παραγωγίσιμων συναρτήσεων f, g για τις οποίες ισχύει $f'(x)=g'(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ισχύει $f(x)=g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\alpha\cdot x^3}{x^2-\beta}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=0$
- $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=+\infty$

Β1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=\beta=1$.

Μονάδες 8

Β2. Αν $g:(-1,1)\to\mathbb{R}$ με $g(x)=f(x)$, για κάθε $x\in(-1,1)$, τότε να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφής.

Μονάδες 4+4

Β3. Να υπολογίσετε τα όρια (εφόσον υπάρχουν):

α) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{g(x)}$ **β)** $\lim\limits_{x \to e} \left(g(\ln x)\right)$

Μονάδες 4+5

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο διάστημα $[-\pi,\pi]$ για την οποία ισχύει $x \cdot f'(x) = \sigma\upsilon\nu x - f(x)$ για κάθε $x \in [-\pi,\pi]$ και παρουσιάζει στο σημείο $x_0 \in (-\pi,\pi)$ ακρότατο ίσο με 1.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $x_0 = 0$ και $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\eta\mu x}{x}, & \text{αν } x \in [-\pi,0) \cup (0,\pi] \\ 1, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$.

Μονάδες 3+4

Γ2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-\pi,0]$, γνησίως φθίνουσα στο $[0,\pi]$ και να βρείτε τα ακρότατα και το σύνολο τιμών.

Μονάδες 6

Γ3. Να λυθεί η ανίσωση $\ln f(x) + 1 < f(x)$.

Μονάδες 6

Γ4. Θεωρούμε σημείο $M(x(t), y(t))$, όπου $t \geq 0$, το οποίο κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της f με $x(t) > 0$ και $x'(t) = \pi$ cm/sec. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης $y(t)$ του σημείου M όταν βρεθεί στη θέση $(\pi, 0)$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν:

- $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = \dfrac{1}{e}$.
- F παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $F'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $F(0) = 0$.
- $f'(x) \cdot \sqrt{x^2+1} = f(x) \cdot \left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^{x-\sqrt{x^2+1}}$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 3+4

Δ2. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\ell n\left(\dfrac{e^x}{\sigma\upsilon\nu x}\right) = \sqrt{x^2+1}$ έχει μοναδική ρίζα στο $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Μονάδες 6

Δ3. Να λυθεί η εξίσωση $F(\eta\mu x) - F(x) = f(x) - f(\eta\mu x)$.

Μονάδες 6

Δ4. Να δείξετε ότι $F(e) > 1$.

Μονάδες 6