



2020 | Μάιος | Φάση 3 | Διαγωνίσματα Επανάληψης

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (Νέο σύστημα)

Γ' Γενικού Λυκείου

Θετικών Σπουδών

Παρασκευή 22 Μαΐου 2020 | Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία

A2. Θεωρία

A3. α) Ψευδής

β) Για αντιπαράδειγμα αναφέρουμε την f με $f(x) = x^3$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ αλλά δεν ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αφού $f'(x) = 3x^2$, άρα για $x = 0$ έχουμε $f'(0) = 0$.

A4. α) Σωστό.

β) Σωστό.

γ) Λάθος.

δ) Σωστό.

ε) Λάθος.



ΘΕΜΑ Β

B1. Ισχύει ότι

$$f(x) - x = \frac{\alpha x^3}{x^2 - \beta} - x = \frac{\alpha x^3 - x(x^2 - \beta)}{x^2 - \beta} \Rightarrow f(x) - x = \frac{(\alpha - 1)x^3 + \beta x}{x^2 - \beta}$$

Διακρίνω περιπτώσεις για το $\alpha - 1$:

I) Αν $\alpha - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 1$ τότε έχω:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\alpha - 1)x^3}{x^2} = (\alpha - 1)(+\infty) = \begin{cases} +\infty & \text{αν } \alpha - 1 > 0 \Leftrightarrow \alpha > 1 \\ -\infty & \text{αν } \alpha - 1 < 0 \Leftrightarrow \alpha < 1 \end{cases}$$

Άτοπο, αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$.

II) Αν $\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$ τότε:

$$f(x) - x = \frac{x^3}{x^2 - \beta} - x = \frac{x^3 - x(x^2 - \beta)}{x^2 - \beta} \Rightarrow f(x) - x = \frac{\beta x}{x^2 - \beta} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\beta x}{x^2 \left(1 - \frac{\beta}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{\beta}{1 - \frac{\beta}{x}} \right) = 0 \cdot \frac{\beta}{1 - 0} = 0$$

Άρα $\alpha = 1$.

Για $\alpha = 1$ έχω:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - \beta} \Leftrightarrow x^2 - \beta = \frac{1}{f(x)} \cdot x^3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - \beta) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{f(x)} \cdot x^3 \right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1 - \beta = 0 \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow \beta = 1$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{f(x)} = 0.$$



B2. α) Ισχύει ότι $g(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$, $x \in (-1,1)$.

Έχουμε ότι g παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ με

$$g'(x) = \frac{(x^3)' \cdot (x^2-1) - x^3 (x^2-1)'}{(x^2-1)^2} \Rightarrow g'(x) = \frac{3x^2(x^2-1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2-1)^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow g'(x) = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}.$$

Αφού $-1 < x < 1$ ισχύει $x^2 - 1 < 0 \Rightarrow x^2 - 3 < 0$ άρα $g'(x) < 0$,

για κάθε $x \in (-1,0) \cup (0,1)$ και αφού η g είναι συνεχής στο $x=0$ έχουμε ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1,1)$, άρα η g είναι 1-1.

Άρα ορίζεται η αντίστροφη της g και ισχύει

$$D_{g^{-1}} = g((-1,1)) \stackrel{g \text{ γν. φθίνουσα}}{=} \left(\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x), \lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) \right) \text{ όπου}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{x^3}{x^2-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{1}{x-1} \cdot \frac{x^3}{x+1} \right) = (-\infty) \cdot \frac{1}{2} = -\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{x^3}{x^2-1} \right) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{1}{x+1} \cdot \frac{x^3}{x-1} \right) = (+\infty) \cdot \frac{1}{2} = +\infty.$$

$$\text{Άρα } D_{g^{-1}} = (-\infty, +\infty).$$

B3. α) Η συνάρτηση $\frac{1}{g(x)}$ ορίζεται στο $(-1,0) \cup (0,1)$ και ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x^2-1}{x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^3} \cdot (x^2-1) \right) = +\infty \cdot (-1) = -\infty.$$

$$\text{Ακόμα } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x^2-1}{x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x^3} \cdot (x^2-1) \right) = (+\infty) \cdot (-1) = -\infty.$$

$$\text{Αφού } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{g(x)} \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{g(x)} \text{ δεν υπάρχει το } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{g(x)}.$$



2020 | Μάιος | Φάση 3 | Διαγωνίσματα Επανάληψης

β) Η συνάρτηση $g(\ln x)$ ορίζεται στο σύνολο

$$A = \{x \in (0, +\infty) / \ln x \in (-1, 1)\} = \left(\frac{1}{e}, e\right)$$

$$\text{Θέτω } u = \ln x \text{ και } u_0 = \lim_{x \rightarrow e^-} (\ln x) = \ln e = 1.$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow e^-} g(\ln x) = \lim_{x \rightarrow e^-} g(\ln x) = \lim_{u \rightarrow 1^-} g(u) = \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{u^3}{u^2 - 1} =$$

$$\lim_{u \rightarrow 1^-} \left(\frac{1}{u-1} \cdot \frac{u^3}{u+1} \right) = (-\infty) \cdot \frac{1}{2} = -\infty.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αφού f παραγωγίσιμη στο $[-\pi, \pi]$ και στο $x_0 \in (-\pi, \pi)$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο ίσο με 1, θα ισχύει από Θ. Fermat ότι $f'(x_0) = 0$ και επιπλέον $f(x_0) = 1$.

Αντικαθιστώντας στην αρχική σχέση έχουμε

$$x_0 \cdot f'(x_0) = \sin x_0 - f(x_0) \Leftrightarrow x_0 \cdot 0 = \sin x_0 - 1 \Leftrightarrow \sin x_0 = 1 \text{ και αφού}$$

$$x_0 \in (-\pi, \pi) \text{ ισχύει ότι } x_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Ακόμη έχουμε $x \cdot f'(x) + f(x) = \sin x \Leftrightarrow (x \cdot f(x))' = (\sin x)'$ άρα από συνέπειες Θ.Μ.Τ. θα ισχύει ότι $x \cdot f(x) = \sin x + c$.

$$\text{Για } x = 0 \text{ έχω: } 0 \cdot f(0) = \sin 0 + c \Leftrightarrow c = 0. \text{ Άρα } x \cdot f(x) = \sin x.$$

$$\text{Αν } x \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi] \text{ έχω: } f(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

Αφού f παρ/μη στο $[-\pi, \pi]$ έχουμε ότι η f είναι συνεχής στο $x = 0$ δηλ. θα

$$\text{ισχύει ότι } f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

$$\text{Άρα } f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{αν } x \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi] \\ 1, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$



2020 | Μάιος | Φάση 3 | Διαγωνίσματα Επανάληψης

Γ2. Αν $x \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi]$ ισχύει $f'(x) = \frac{\sin x - x - \eta \mu x}{x^2}$.

Θέτουμε $g(x) = \sin x \cdot x - \eta \mu x$, $x \in [-\pi, \pi]$ και έχουμε

$$g'(x) = -\eta \mu x \cdot x + \cancel{\sin x} - \cancel{\sin x} = -x \cdot \eta \mu x \Rightarrow g'(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in (-\pi, \pi).$$

Δηλ. $g \downarrow$ στο $[-\pi, \pi]$. Άρα αν

$$x \in [-\pi, 0) \text{ δηλ. } x < 0 \Rightarrow g(x) > g(0) = 0 \Rightarrow g(x) > 0 \text{ οπότε}$$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2} > 0 \text{ στο } [-\pi, 0).$$

Άρα $f \uparrow$ στο $[-\pi, 0]$. Αν $x \in (0, \pi]$ δηλ. $x > 0$ έχουμε

$$g(x) < g(0) = 0 \Rightarrow g(x) < 0 \text{ άρα } f'(x) = \frac{g(x)}{x^2} < 0$$

στο $(0, \pi] \Rightarrow f \downarrow$ στο $[0, \pi]$.

x	$-\pi$	0	π
$f'(x)$	+	○	-
$f(x)$			

Άρα η f παρουσιάζει για $x = -\pi$ και $x = \pi$ ολικό ελάχιστο ίσο με

$$f(-\pi) = f(\pi) = 0 \text{ και για } x = 0 \text{ ολικό μέγιστο ίσο με } f(0) = 1.$$

Έχουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[-\pi, 0]$ επομένως

$$f([-\pi, 0]) = [f(-\pi), f(0)] = [0, 1].$$

Ακόμη, η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $[0, \pi]$ επομένως

$$f([0, \pi]) = [f(\pi), f(0)] = [0, 1].$$

$$\text{Άρα } f([-\pi, \pi]) = f([-\pi, 0]) \cup f([0, \pi]) = [0, 1].$$



2020 | Μάιος | Φάση 3 | Διαγωνίσματα Επανάληψης

Γ3. Η ανίσωση γράφεται ισοδύναμα $\ln f(x) < f(x) - 1$ με $f(x) > 0$.

Επειδή $f(-\pi) = f(\pi) = 0$ και $f([- \pi, \pi]) = [0, 1]$ θα πρέπει $x \neq -\pi$ και $x \neq \pi$.

Θέτουμε $f(x) = \omega$ και η ανίσωση γίνεται $\ln \omega < \omega - 1$ με $\omega > 0$.

Από γνωστή εφαρμογή ισχύει ότι $\ln \omega \leq \omega - 1$ για κάθε $\omega > 0$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $\omega = 1$.

Άρα πρέπει $\omega \neq 1 \Rightarrow f(x) \neq 1$ και αφού $f(0) = 1$ ($x = 0$ θέση ολικού μεγίστου) θα πρέπει $x \neq 0$.

Επομένως $x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$.

Γ4. Ισχύει $y(t) = f(x(t))$ άρα $y'(t) = f'(x(t)) \cdot x'(t) \Rightarrow$

$$\Rightarrow y'(t) = \frac{\sin(x(t)) \cdot x'(t) \cdot x(t) - \eta\mu(x(t)) \cdot x'(t)}{x^2(t)}.$$

Για $t = t_0$ έχουμε $M(x(t_0), y(t_0)) \equiv (\pi, 0) \Rightarrow \begin{cases} x(t_0) = \pi \\ y(t_0) = 0 \end{cases}$ και

$$x'(t_0) = x'(t) = \pi \text{ cm/sec.}$$

$$\text{Άρα } \Rightarrow y'(t_0) = \frac{\sin(x(t_0)) \cdot x(t_0) - \eta\mu(x(t_0))}{x^2(t_0)} \cdot x'(t_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'(t_0) = \frac{\sin \pi - \eta\mu \pi}{\pi^2} \cdot \pi \xrightarrow[\sin \pi = -1]{\eta\mu \pi = 0} y'(t_0) = \frac{-\pi^2}{\pi^2} = -1 \text{ cm/sec.}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε ότι $f'(x) \cdot \sqrt{x^2 + 1} = f(x) \cdot (\sqrt{x^2 + 1} - x)$.

Διαιρούμε με $f(x) \cdot \sqrt{x^2 + 1} \neq 0$ και έχουμε

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{\sqrt{x^2 + 1}} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \Leftrightarrow (\ln |f(x)|)' = (x - \sqrt{x^2 + 1})'$$

οπότε από συνέπειες Θ.Μ.Τ. έχουμε $\ln |f(x)| = x - \sqrt{x^2 + 1} + c$.



2020 | Μάιος | Φάση 3 | Διαγωνίσματα Επανάληψης

Για $x=0$ έχουμε: $\ln|f(0)| = 0 - \sqrt{0^2+1} + c \Leftrightarrow \ln \frac{1}{e} = -1 + c \Leftrightarrow c = 0$

Άρα $\ln|f(x)| = x - \sqrt{x^2+1}$.

Επειδή f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ είναι και συνεχής και αφού $f(x) \neq 0$ η f θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

Όμως $f(0) = \frac{1}{e} > 0$ άρα $f(x) > 0, x \in \mathbb{R}$.

Άρα $\ln f(x) = x - \sqrt{x^2+1} \Rightarrow f(x) = e^{x-\sqrt{x^2+1}}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = e^{x-\sqrt{x^2+1}} \cdot (x - \sqrt{x^2+1})' = e^{x-\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) \Rightarrow f'(x) = e^{x-\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1} - x}{\sqrt{x^2+1}}$$

.

Όμως ισχύει $x^2 + 1 > x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| \geq x \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} - x > 0$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα $f \uparrow$ στο $\mathbb{R}$.

Αφού f συνεχής στο $\mathbb{R}$ ισχύει ότι: $f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)\right)$ όπου

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x-\sqrt{x^2+1}}$. Θέτω $u = x - \sqrt{x^2+1}$ και έχω

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \sqrt{x^2+1}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x - |x| \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right] \stackrel{|x|=-x}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right) \right] = (-\infty) \cdot 2 = -\infty.$$

Άρα $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0$ και

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2+1}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - (\sqrt{x^2+1})^2}{x + \sqrt{x^2+1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x^2 - 1}{x + |x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \stackrel{|x|=x}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right)} = 0 \cdot \frac{1}{2} = 0. \end{aligned}$$

Άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{u \rightarrow 0} e^u = e^0 = 1$. Οπότε $f(\mathbb{R}) = (0, 1)$.



2020 | Μάιος | Φάση 3 | Διαγωνίσματα Επανάληψης

Δ2. Η εξίσωση $\ln\left(\frac{e^x}{\sin x}\right) = \sqrt{x^2 + 1}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ γράφεται ισοδύναμα:

$$\ln e^x - \ln(\sin x) = \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow x - \sqrt{x^2 + 1} = \ln(\sin x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{x - \sqrt{x^2 + 1}} = \sin x \Leftrightarrow f(x) = \sin x \Leftrightarrow f(x) - \sin x = 0.$$

Θεωρώ $h(x) = f(x) - \sin x$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και έχω ότι

$h'(x) = f'(x) - \cos x > 0$, για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ άρα $h \uparrow$ στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Τότε

$$h\left(\left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x), \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} h(x)\right) = \left(\frac{1}{e} - 1, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \text{ αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (f(x) - \sin x) = f(0) - \sin 0 = \frac{1}{e} - 1 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (f(x) - \sin x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin \frac{\pi}{2} = f\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Επειδή $\frac{1}{e} - 1 < 0 < f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ έχω ότι $0 \in h\left(\left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right)$ κα αφού $h \uparrow$ στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ υπάρχει

μοναδικό $\rho \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$: $h(\rho) = 0 \Leftrightarrow f(\rho) = \sin \rho$.

Άρα η εξίσωση $\ln\left(\frac{e^x}{\sin x}\right) = \sqrt{x^2 + 1}$ έχει μοναδική ρίζα $\rho \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Δ3. Η εξίσωση $F(\eta\mu x) - F(x) = f(x) - f(\eta\mu x)$ γράφεται ισοδύναμα

$$F(\eta\mu x) + f(\eta\mu x) = F(x) + f(x) \quad (1).$$

Θεωρώ τη συνάρτηση $\varphi(x) = F(x) + f(x)$ με F, f παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ με

$$F'(x) = f(x) > 0 \text{ και } f'(x) > 0.$$

Άρα $\varphi'(x) = F'(x) + f'(x) = f(x) + f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δηλαδή η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα είναι και 1-1.

Η εξίσωση (1) γράφεται: $\varphi(\eta\mu x) = \varphi(x) \Leftrightarrow \eta\mu x = x$ που ισχύει μόνο για $x = 0$

(αφού $|\eta\mu x| \leq |x|$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$).



2020 | Μάιος | Φάση 3 | Διαγωνίσματα Επανάληψης

Δ4. Αφού F παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ έχω ότι F παρ/μη και στο $[0, e]$ και παρ/μη στο $(0, e)$.

Άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi \in (0, e)$:

$$F'(\xi) = \frac{F(e) - F(0)}{e - 0} \Rightarrow F'(\xi) = \frac{F(e)}{e} \quad (1)$$

$$\text{Όμως } F'(\xi) = f(\xi) \quad (2)$$

$$\text{και } f \uparrow \text{ στο } \mathbb{R} \text{ οπότε αφού } \xi > 0 \text{ } f(\xi) > f(0) = \frac{1}{e} \quad (3)$$

$$\text{Άρα από (1), (2) και (3) έχω: } \frac{F(e)}{e} > \frac{1}{e} \Rightarrow F(e) > 1.$$