ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β' Γενικού Λυκείου

Θετικών Σπουδών

Σάββατο 23 Μαΐου 2020 | Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 83

Β. **i)** Σχολικό βιβλίο, σελίδα 60 – 61

ii) Σχολικό βιβλίο, σελίδα 61

Γ. **i)** Γ

ii) **α)** Λ

β) Λ

γ) Σ

ΘΕΜΑ Β

i) $x^2 + y^2 - 6\lambda x + 2\lambda y = 0$ (1). Για να παριστάνει κύκλο πρέπει $(-\lambda)^2 + (2\lambda)^2 > 0 \Leftrightarrow 40\lambda^2 > 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 0$

ii) $\mathrm{K}\left(-A/2\ \ -B/2\right):(3\lambda,-\lambda)$ και $\rho = \dfrac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2} = \dfrac{\sqrt{40\lambda^2}}{2} = 10\cdot|\lambda|$

iii) $K(3\lambda,-\lambda)$ $\left.\begin{array}{l} x=3\lambda \\ y=-\lambda \end{array}\right\}$ άρα $x+3y=0$ η οποία παριστάνει ευθεία.

iv) $x^2 + y^2 - 6\lambda x + 2\lambda y = 0 \Leftrightarrow (x^2 + y^2) + \lambda(-6x + 2y) = 0$ και αν έχουν κοινό σημείο x_0 τότε:

$$\left(x_0^{\ 2}+y_0^{\ 2}\right)+\lambda\cdot\left(-6x_0+2y_0\right)=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x_0^{\ 2}+y_0^{\ 2} \\ -6x_0+2y_0=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x_0=y_0=0$$

Δηλαδή το κοινό σημείο όλων των κύκλων είναι η αρχή των αξόνων 0(0, 0).

v) Αφού τα κέντρα όλων των κύκλων βρίσκονται στην ευθεία ε: $x + 3y = 0$ και διέρχονται από το Ο(0, 0), η κοινή εφαπτόμενη ευθεία τους θα είναι κάθετη στην (ε) (άρα θα έχει $\lambda = 3$) και θα περνάει από το Ο(0, 0), δηλαδή θα είναι η ευθεία: η: $y - 0 = 3\,(x - 0) \Leftrightarrow \eta$: $y = 3x$.

ΘΕΜΑ Γ

1) $\vec{AB}=(3,0)$, $\vec{A\Gamma}=(5-2)$, $\vec{B\Gamma}=(2,-2)$

Παρατηρούμε ότι α) $\vec{AB}+\vec{B\Gamma}+\vec{\Gamma A}=(3,0)+(2,-2)+(-5,2)=(0,0)$

και β) $\det\left(\vec{AB},\vec{A\Gamma}\right)=\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}=6\neq 0$, δηλαδή τα $\vec{AB}$ και $\vec{A\Gamma}$ δεν είναι παράλληλα.

Άρα τα A,B,Γ είναι κορυφές τριγώνου

2) $\vec{u}=2\vec{AB}-\vec{A\Gamma}=$ 2(3,0)- $(5,-2)$ = $(6,0)$ − $(5,-2)$= $(1,2)$

Αφού $\vec{u}//\vec{v}$: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ \lambda^2 & \lambda+1 \end{vmatrix}$ $=0 \Leftrightarrow \lambda+1-2\lambda^2=0 \Leftrightarrow \lambda^2=1 \Leftrightarrow \lambda\pm 1$

3) $\lambda_{AB} = 0$ και αφού διέρχεται από το A(ή το B) θα είναι της μορφής $y = 1$.
Προφανώς η απόσταση του $\Gamma(3,-1)$ από την $y = 1$ είναι 2.

4) Έστω $\Delta(x, y)$. Για να είναι το $AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμο πρέπει και αρκεί
$\vec{AB} = \vec{\Delta\Gamma} \Leftrightarrow (3,0) = (3-x,-1-y) \Leftrightarrow 3-x=3$ και $-1-y=0 \Leftrightarrow x=0$ και $y=-1$.
Δηλαδή $\Delta(0,-1)$

5) $\left|\vec{AB}\right| = \sqrt{3^2+0^2} = 3$

$\vec{AB}\cdot\vec{B\Gamma} = (3,0)\cdot(2,-2) = (6+0) = 6$. Άρα $\Lambda(3,6)$
Δηλαδή έχουμε ευθεία που διέρχεται από το λ και αφού σχηματίζει γωνία 45^o
με τον xx' θα έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = εφ45 = 1$
Έτσι θα έχει εξίσωση $y-6 = 1\cdot(x-3) \Leftrightarrow y = x+3$

6) Ο κύκλος έχει κέντρο $K(0,0)$.
Το μέσο M του AB είναι: $M\left(\frac{-2+1}{2},\frac{1+1}{2}\right):\left(\frac{-1}{1},1\right)$

Δηλαδή η ακτίνα του είναι $\rho = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+1^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+1} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

με εξίσωση $c: x^2+y^2 = \frac{5}{4}$

ΘΕΜΑ Δ

i) $K_1(1,0)\ \ \rho_1=\dfrac{\sqrt{2^2+12}}{2}=\dfrac{\sqrt{16}}{2}=\dfrac{4}{2}=2$

και $K_2(1,0)\ \ \rho_2=\dfrac{\sqrt{36-20}}{2}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}=\dfrac{4}{2}=2$

αφού $C:\ x^2+y^2-6x+5=0$

ii) Αφού το $A(1,\lambda)$ ανήκει στον κύκλο C_1: $1^2+\lambda^2-2+3=0 \Leftrightarrow \lambda^2=4 \Leftrightarrow \lambda=\pm 2$ με δεκτή το $\lambda=2$. Άρα $A(1,2)$. Επειδή $A(1,2)$ και $K_1(1,0)$ η ευθεία K_1A είναι κάθετη στον xx' και σαν ακτίνα είναι κάθετη στην εφαπτομένη, η οποία είναι η ευθεία $y=2$ (η οποία διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$).

iii) Θα δείξουμε ότι η ευθεία ε: $y=2$ είναι κάθετη και στον κύκλο C_2.

$$d(K_2,\varepsilon)=\frac{|0\cdot 3+0\cdot 1-2|}{\sqrt{1^2+0^2}}=2=\rho_2.$$

Άρα η $y=2$ είναι εφαπτόμενη και του κύκλου C_2

iv) Οι κύκλοι C_1 και C_2 είναι ίσες ακτίνες ($\rho_1=\rho_2=2$) άρα η ευθεία των κέντρων τους K_1K_2 (δηλαδή ο xx') είναι η μεσοπαράλληλη ευθεία των εφαπτομένων τους $y=2$ και $y=-2$

iv)