ΑΛΓΕΒΡΑ

Α' Γενικού Λυκείου

Δευτέρα 25 Μαΐου 2020 | Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 90.

Α2. i. → Σωστό ii. → Λάθος iii. → Λάθος iv. → Σωστό v. → Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$$d(\alpha,4)<2 \Leftrightarrow |\alpha-4|<2 \Leftrightarrow -2<\alpha-4<2 \overset{+4}{\Leftrightarrow} 2<\alpha<6.$$

$$|\beta-3|<1 \Leftrightarrow -1<\beta-3<1 \overset{+3}{\Leftrightarrow} 2<\beta<4.$$

Β2. $A=|\alpha-1|+3|\beta-5|-|2\alpha-\beta|$

$2<\alpha<6 \overset{-1}{\Leftrightarrow} 1<\alpha-1<5.$ Επομένως $|\alpha-1|=\alpha-1$

$2<\beta<4 \overset{-5}{\Leftrightarrow} -3<\beta-5<-1.$ Επομένως $|\beta-5|=-(\beta-5)$

$$\left.\begin{array}{l} 2<\alpha<6 \overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow} 4<2\alpha<12 \\ 2<\beta<4 \overset{\cdot(-1)}{\Leftrightarrow} -2>-\beta>-4 \Leftrightarrow -4<-\beta<-2 \end{array}\right\} \oplus$$

$0<2\alpha-\beta<10.$ Επομένως $|2\alpha-\beta|=2\alpha-\beta.$

$A=\alpha-1-3(\beta-5)-(2\alpha-\beta)=\alpha-1-3\beta+15-2\alpha+\beta$

$A=-\alpha-2\beta+14.$

Β3. $x = 2\alpha - 3 \qquad y = \beta - 1.$

$$B = 2\alpha - 3 + 2(\beta - 1) - 5 = 2\alpha - 3 + 2\beta - 2 - 5 \Leftrightarrow B = 2\alpha + 2\beta - 10.$$

$$\Gamma = 3(2\alpha - 3) - 2(2\alpha - 3 + \beta - 1) \Leftrightarrow \Gamma = 6\alpha - 9 - 4\alpha + 6 - 2\beta + 2 \Leftrightarrow \Gamma = 2\alpha - 2\beta - 1.$$

Β4.

$$K = \frac{\left(x^3\right)^{-2} \cdot \left(y^3\right)^4}{x^3} \cdot \frac{\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{-10}}{\left(y^3\right)^2 \cdot \left(x^3 y^2\right)^{-1}} \Leftrightarrow K = \frac{x^{-6} \cdot y^{12}}{x^3} \cdot \frac{x^{20}}{y^6 \cdot x^{-3} \cdot y^{-2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \; K = \frac{x^{-6} \cdot y^{12} \cdot x^{20}}{x^3 \cdot y^6 \cdot x^{-3} \cdot y^{-2}} \Leftrightarrow K = \frac{y^{12} \cdot x^{14}}{x^0 \cdot y^4} = x^{14} \cdot y^8.$$

ΘΕΜΑ Γ

$$(\lambda + 1)x^2 - (\lambda - 1)x - \lambda = 0, \lambda \neq -1, \qquad (1)$$

Γ1.

$$\Delta = \left[-(\lambda - 1)\right]^2 - 4(\lambda + 1) \cdot (-\lambda) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Delta = (\lambda - 1)^2 + 4\lambda(\lambda + 1) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 + 4\lambda^2 + 4\lambda \Leftrightarrow \Delta = 5\lambda^2 + 2\lambda + 1.$$

Αρκεί να δείξω ότι $\Delta > 0$

$\Delta_\lambda = 4 - 4 \cdot 5 \cdot 1 = -16 < 0.$

Επομένως το τριώνυμο $5\lambda^2 + 2\lambda + 1 > 0$ (ομόσημο του $\alpha = 5$).

Άρα $\Delta > 0$, έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες.

Γ2. Για να έχει η (1) δύο ρίζες αντίθετες πρέπει

$$5 = 0 \Leftrightarrow -\frac{\beta}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} = 0 \Leftrightarrow \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1.$$

Γ3.

$$x_1^{\,2}x_2+x_2^{\,2}x_1=-2\Leftrightarrow x_1x_2\left(x_1+x_2\right)=-2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P\cdot S=-2\Leftrightarrow \frac{\gamma}{\alpha}\cdot\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)=-2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-\lambda}{\lambda+1}\cdot\frac{\lambda-1}{\lambda+1}=-2\Leftrightarrow \frac{-\lambda(\lambda-1)}{(\lambda+1)^2}=-2\Leftrightarrow$$

$$\overset{\lambda\neq-1}{\Leftrightarrow}-\lambda^2+\lambda=-2\lambda^2-4\lambda-2\Leftrightarrow \lambda^2+5\lambda+2=0.$$

$$\Delta=17$$

$$x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{17}}{2}.$$

ΘΕΜΑ Δ

$$x^2-(4\lambda-2)x+\lambda(3-8\lambda)=0,\quad \lambda\in\ .$$

Δ1. $\Delta=\left[-(4\lambda-2)\right]^2-4\lambda(3-8\lambda)\Leftrightarrow \Delta=16\lambda^2-16\lambda+4-12\lambda+32\lambda^2\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \Delta=48\lambda^2-28\lambda+4=4\cdot\left(12\lambda^2-7\lambda+1\right)\qquad(1)$$

$$\Delta_\lambda=49-48=1$$

$$\lambda_{1,2}=\frac{+7\pm1}{24}\left\langle\begin{matrix}\lambda_1=\frac{1}{3}\\[2ex]\lambda_2=\frac{1}{4}\end{matrix}\right.$$

$$(1)\ \rightarrow\ \Delta=4\cdot12\left(\lambda-\frac{1}{3}\right)\left(\lambda-\frac{1}{4}\right)=4\cdot4\cdot3\left(\lambda-\frac{1}{3}\right)\left(\lambda-\frac{1}{4}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Delta=4(4\lambda-1)(3\lambda-1).$$

Δ2. Για να έχει διπλή ρίζα πρέπει $\Delta=0$

$$\Leftrightarrow 4(4\lambda-1)(3\lambda-1)=0\Leftrightarrow 4\lambda-1=0\quad ή\quad 3\lambda-1=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda=\frac{1}{4}\quad ή\quad \lambda=\frac{1}{3}.$$

Επειδή $\lambda_1 < \lambda_2$, επομένως: $\lambda_1 = \frac{1}{4}$. Για $\lambda_1 = \frac{1}{4}$. Η διπλή ρίζα

$$x_0 = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x_0 = -\frac{1}{2}.$$

Δ3. Για να έχει η (1) δύο ρίζες άνισες πρέπει $\Delta > 0 \Leftrightarrow 4(4\lambda - 1)(3\lambda - 1) > 0$.

	$-\infty$		$1/4$		$1/3$		$+\infty$
$4\lambda-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$3\lambda-1$		$-$		$-$	0	$+$	
Δ		$+$	0	$-$	0	$+$	

Επομένως, $\lambda \in \left(-\infty, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$.

$$4x_1x_2 = 3x_1 + 3x_2 - 26$$

$$4P = 3S - 26 \Leftrightarrow 4\lambda(3-8\lambda) = 3(4\lambda-2) - 26 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12\lambda - 32\lambda^2 = 12\lambda - 6 - 26 \Leftrightarrow 32\lambda^2 = 32 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = -1 \quad \text{ή} \quad \lambda = 1.$$

Δεκτές και οι δύο λύσεις εφόσον $\lambda \in \left(-\infty, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$.