



2019 | Απρίλιος | Φάση 3 | Διαγωνίσματα Επανάληψης

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ' Γενικού Λυκείου

Θετικών Σπουδών

Μ. Τετάρτη 24 Απριλίου 2019 | Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε διάστημα Δ και x_0 εσωτερικό σημείο του Δ . Να αποδείξετε ότι αν η f παρουσιάζει στο σημείο x_0 τοπικό ακρότατο και είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε ισχύει $f'(x_0) = 0$.

Μονάδες 7

A2. Να διατυπώσετε και να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το Θεώρημα Μέσης Τιμής.

Μονάδες 4

A3. Δίνεται η παρακάτω πρόταση:

«Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ με $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$, τότε ισχύει ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ ».

α) Να εξετάσετε αν η πρόταση είναι **Αληθής** ή **Ψευδής**.

Μονάδες 1

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 3



A4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν για τις συναρτήσεις f, g ορίζεται η σύνθεση $g \circ f$, τότε $D_{g \circ f} \subseteq D_f$.

Μονάδες 2

β) Για κάθε συνάρτηση f για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$, με

$x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, τότε ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.

Μονάδες 2

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε διάστημα $\Delta = (\alpha, \beta) \cup (\gamma, \delta)$ με $\beta < \gamma$ και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ .

Μονάδες 2

δ) Αν μια κυρτή συνάρτηση f και μια κοίλη συνάρτηση g είναι ορισμένες στο \mathbb{R} και έχουν κοινή εφαπτομένη (ε) , τότε ισχύει ότι $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 2

ε) Για όλες τις συναρτήσεις f, g που είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει

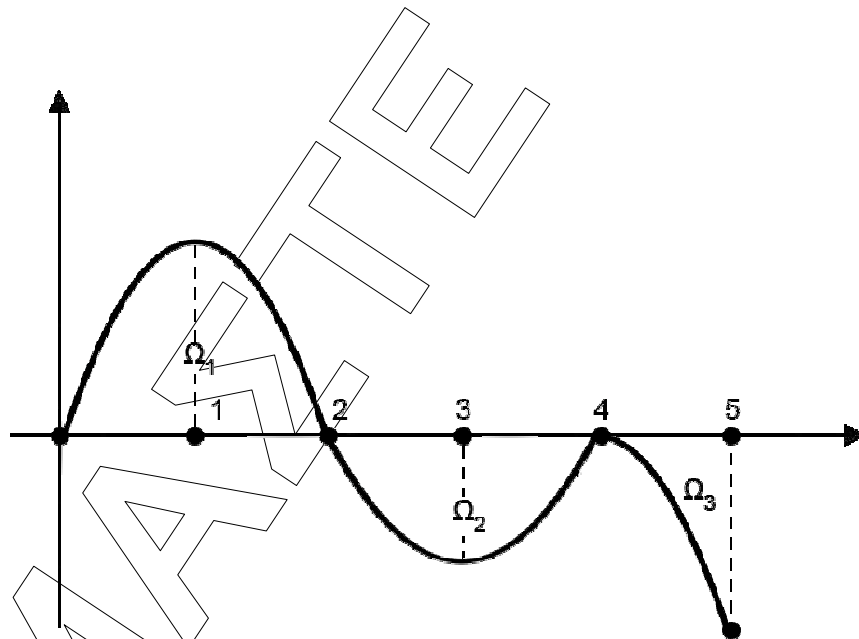
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση f με γραφική παράσταση που δίνεται στο παρακάτω σχήμα, για το οποίο ισχύουν:

- $E(\Omega_1) = \frac{3}{2}E(\Omega_2) = 2E(\Omega_3) = 6$
- Η C_f παρουσιάζει για $x=1$ μέγιστο.
- Οι ευθείες $x=1$ και $x=3$ χωρίζουν τα χωρία Ω_1 και Ω_2 αντίστοιχα σε ισεμβαδικά χωρία.
- F μια αρχική της f στο $[0,5]$ με $F(4)=0$.



B1. Να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{F(x)}$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x+1) + F(1-x) - 2F(1)}{x^2}$.

Μονάδες 6

B2. Να μελετήσετε την συνάρτηση F ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 7



- B3.** Να μελετήσετε την συνάρτηση F ως προς τη κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
Μονάδες 7
- B4.** Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης F .
Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε την συνάρτηση f που είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ και για την οποία ισχύουν $f(x) = xf'(x) - x$ και $f(x) \leq f(1) + x^2 - x$, για κάθε $x > 0$.

- Γ1.** Να αποδείξετε ότι $f(1) = 0$.
Μονάδες 4
- Γ2.** Να αποδείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} x \ln x, & \text{αν } x > 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$
Μονάδες 5
- Γ3.** Να δείξετε ότι η ευθεία $y = \frac{1}{e}x - \frac{1}{e}$ έχει με την γραφική παράσταση της f ακριβώς δυο κοινά σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$ με $0 < \alpha < \frac{1}{e}$ και $B(1, 0)$.
Μονάδες 8
- Γ4.** Για την τιμή του α του ερωτήματος **Γ3**, να δείξετε ότι ισχύει $\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}} < \alpha^{\alpha} < 1$.
Μονάδες 8



ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο \mathbb{R} , για την οποία ισχύουν:

- $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $\frac{1-2f(x)}{f^2(x)} = x^4 - 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(-1) = f(1) = \frac{1}{2}$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$.

Μονάδες 7

Δ2. Αν F μια αρχική της f με $F(0) \geq 0$, τότε να δείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ της γραφικής παράστασης της F , του άξονα xx' , του άξονα yy' και της ευθείας $x=1$ είναι ίσο με $E = F(1) - \ln\sqrt{2}$.

Μονάδες 7

Δ3. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ , ώστε η ευθεία $x = \lambda$ να χωρίζει το χωρίο Ω που σχηματίζεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα xx' και τις ευθείες $x = \frac{1}{2}$ και $x = 2$, σε δύο ισοεμβαδικά χωρία.

Μονάδες 7

Δ4. Θεωρούμε σημείο A που κινείται πάνω στην γραφική παράσταση της f με τετμημένη $x(t) \geq 1$, όπου $t \geq 0$. Να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης το μέτρο της ταχύτητας με την οποία το A απομακρύνεται από τον άξονα yy' είναι διπλάσιο του μέτρου της ταχύτητας με την οποία το σημείο A πλησιάζει τον άξονα xx' .

Μονάδες 4

Να έχετε επιτυχία!