ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ' Γενικού Λυκείου

Θετικών Σπουδών

Μ. Τετάρτη 24 Απριλίου 2019 | Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 142-143

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 128-129

Α3. **α)** Ψευδής.

β) Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x)=x-1$ τότε

$$\int_0^3 f(x)\,dx=\int_0^3 (x-1)\,dx=\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_0^3=\frac{9}{2}-3=\frac{3}{2}>0.$$

Όμως $f(0)=-1<0$.

Αντίστοιχα μπορούμε να θεωρήσουμε την $f(x)=\eta\mu x$ με $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \eta\mu x\,dx=1>0$

και $\eta\mu\frac{3\pi}{2}=-1<0$ κ.λπ.

Α4. **α)** Σωστό.
β) Λάθος.
γ) Λάθος.
δ) Σωστό.
ε) Λάθος.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Ισχύει ότι

$$\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{F(x)} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}} \lim_{x\to 4}\frac{(x-4)'}{F'(x)}=\lim_{x\to 4}\frac{1}{f(x)}=-\infty$$

αφού ισχύει $\lim\limits_{x\to 4}f(x)=0$ και $f(x)<0$ κοντά στο $x=4$.

Ακόμη έχουμε

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x+1)+F(1-x)-2F(1)}{x^2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{F'(x+1)+F'(1-x)(1-x)'}{2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x+1)-f(1-x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-f(1)+f(1)-f(1-x)}{2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(1+x)-f(1)}{2x}+\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}\right)=\frac{1}{2}f'(1)+\frac{1}{2}f'(1)=f'(1).$$

αφού

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-f(1)}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-f(1)}{x}=\frac{1}{2}f'(1)$$

και

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x} \overset{u=-x}{=} \lim_{u\to 0}\frac{f(1)-f(1+u)}{-2u}=\frac{1}{2}\lim_{u\to 0}\frac{f(1+u)-f(1)}{u}=\frac{1}{2}f'(1).$$

Όμως η f παρουσιάζει για $x = 1$ ολικό μέγιστο και αφού είναι παραγωγίσιμη από θεώρημα Fermat ισχύει ότι $f'(1) = 0$. Άρα

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x+1)+F(1-x)-2F(1)}{x^2}=f'(1)=0.$$

Β2. Αφού $F'(x) = f(x)$ έχουμε ότι η F είναι συνεχής στο $[0, 5]$ και ισχύει:

$f(x) > 0$ στο $(0, 2) \Rightarrow F \uparrow$ στο $[0, 2]$ και

$f(x) < 0$ στο $(2, 4) \cup (4, 5) \Rightarrow F \downarrow$ στο $[2, 5]$.

Άρα η F παρουσιάζει για $x = 2$ ολικό μέγιστο ίσο με $F(2)$ και

για $x = 0$ και $x = 5$ παρουσιάζει τοπικά ελάχιστα ίσα με $F(0)$ και $F(5)$ αντίστοιχα.

Ακόμη ισχύει:

$$E(\Omega_2) = \int_2^4 (-f(x))dx = [-F(x)]_2^4 \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \Leftrightarrow E(\Omega_2) = -F(4) + F(2) \\ \text{Όμως } \dfrac{3}{2}E(\Omega_2) = 6 \Leftrightarrow E(\Omega_2) = 4 \\ \qquad\qquad\qquad \text{και } F(4) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 4 = 0 + F(2) \Rightarrow F(2) = 4,$$

$$E(\Omega_1) = \int_0^2 f(x)dx = [F(x)]_0^2 = F(2) - F(0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6 = 4 - F(0) \Leftrightarrow F(0) = -2.$$

και

$$E(\Omega_3) = \int_4^5 (-f(x))dx = [-F(x)]_4^5 = -F(5) + F(4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 = -F(5) + 0 \Leftrightarrow F(5) = -3.$$

Άρα

για $x = 0$ η F παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο με ελάχιστη τιμή $F(0) = -2$,

για $x = 2$ η F παρουσιάζει ολικό μέγιστο με μέγιστη τιμή $F(2) = 4$ και

για $x = 5$ η F παρουσιάζει ολικό ελάχιστο με ελάχιστη τιμή $F(5) = -3$.

Άρα

$$F([0,5]) = F([0,2]) \cup F([2,5]) = [F(0), F(2)] \cup [F(5), F(2)] =$$

$$= [-2,4] \cup [-3,4] = [-3,4]$$

Β3. Ισχύει ότι $f \uparrow$ στο $[0, 1]$, $f \downarrow$ στο $[1, 3]$, $f \uparrow$ στο $[3, 4]$ και $f \downarrow$ στο $[4, 5]$ άρα η συνάρτηση F $\smile$ στο $(0, 1)$, F $\frown$ στο $(1, 3)$, F $\smile$ στο $(3, 4)$ και F $\frown$ στο $(4, 5)$ άρα παρουσιάζει για $x = 1$, $x = 3$ και $x = 4$ σημεία καμπής.

Όμως

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}E(\Omega_1) \Leftrightarrow \left[F(x)\right]_0^1 = 3 \Leftrightarrow F(1) - F(0) = 3 \Leftrightarrow F(1) = 1.$$

Ακόμη

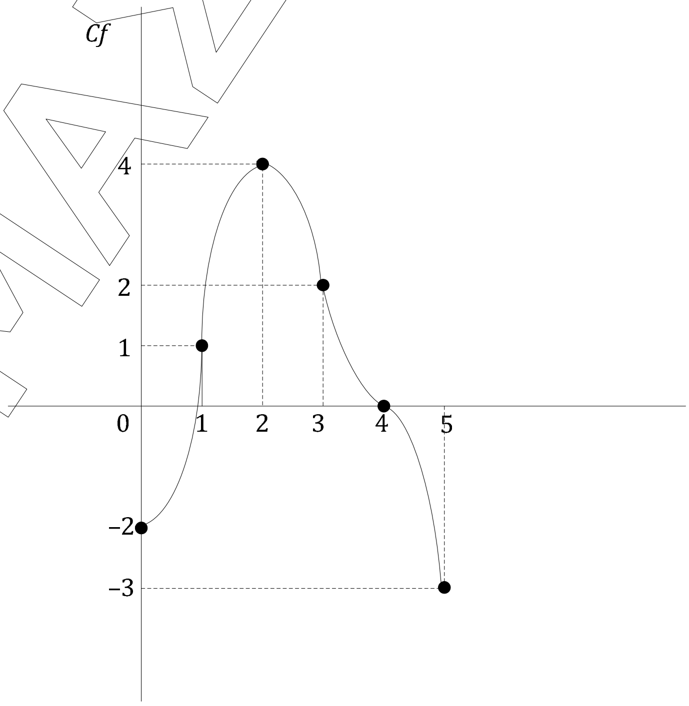
$$\int_2^3 (-f(x))dx = \frac{1}{2}E(\Omega_2) \Leftrightarrow \left[-F(x)\right]_2^3 = \frac{1}{2}\cdot 4 \Leftrightarrow -F(3) + F(2) = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F(3) = 2 \quad \text{και} \quad F(4) = 0.$$

Δηλαδή τα σημεία $A(1, 1)$, $B(3, 2)$, $\Gamma(4, 0)$ είναι σημεία καμπής της F.

Β4. Πίνακας μεταβολών

x	0		1		2		3		4		5
$F'(x)$		+ ↗		+ ↘		− ↘		− ↗		− ↘	
$F(x)$	Τ.Ε.		Σ.Κ.		Ο.Μ.		Σ.Κ.		Σ.Κ.		Ο.Ε.



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αφού ισχύει ότι $f(x)=x\cdot f'(x)-x$ για κάθε $x>0$ έχουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$.

Ακόμα ισχύει ότι $f(x)-f(1)-x^2+x\le 0$ για κάθε $x>0$.

Θεωρούμε την $g(x)=f(x)-f(1)-x^2+x$ και έχουμε ότι

$g(1)=f(1)-f(1)-1+1=0$ και η $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $g'(x)=f'(x)-2x+1$.

Επειδή $g(x)\le g(1)$ για κάθε $x>0$ προκύπτει ότι η συνάρτηση g παρουσιάζει για $x=1$ τοπικό μέγιστο και επειδή $x=1$ είναι εσωτερικό σημείο του $(0,+\infty)$ από το θεώρημα Fermat θα ισχύει ότι $g'(1)=0\Leftrightarrow f'(1)-2+1=0\Leftrightarrow f'(1)=1$.

Άρα $f(1)=f'(1)-1\Rightarrow f(1)=0$.

Γ2. Ισχύει ότι $f(x)=xf'(x)-x\Leftrightarrow xf'(x)-f(x)=x\overset{:x^2>0}{\Leftrightarrow}\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\dfrac{1}{x}\Leftrightarrow$

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=(\ln x)'\Leftrightarrow\frac{f(x)}{x}=\ln x+c. \qquad (1)$$

Για $x=1$ έχουμε $\dfrac{f(1)}{1}=\ln 1+c\Leftrightarrow c=0$.

$(1)\Rightarrow\dfrac{f(x)}{x}=\ln x\Leftrightarrow f(x)=x\cdot\ln x$ για κάθε $x>0$.

Επειδή f συνεχής στο $[0,+\infty)$ προκύπτει

$$f(0)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}x\cdot\ln x=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0$$

Άρα $f(0)=0$ οπότε έχουμε: $f(x)=\begin{cases}x\cdot\ln x\,, & \text{αν } x=0\\ 0\,, & \text{αν } x>0\end{cases}$

Γ3. Θα δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=\frac{1}{e}x-\frac{1}{e} \Leftrightarrow f(x)-\frac{1}{e}x+\frac{1}{e}=0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες.

Θεωρώ $h(x)=f(x)-\frac{1}{e}x+\frac{1}{e}$, η οποία είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{1}{e}\right]$ και

$$h(0)=f(0)-\frac{1}{e}\cdot 0+\frac{1}{e}=\frac{1}{e}>0$$

$$h\left(\frac{1}{e}\right)=f\left(\frac{1}{e}\right)-\frac{1}{e}\cdot\frac{1}{e}+\frac{1}{e}=\frac{1}{e}\cdot\ln\frac{1}{e}-\frac{1}{e^2}+\frac{1}{e}=$$

$$=-\frac{1}{e}-\frac{1}{e^2}+\frac{1}{e}=-\frac{1}{e^2}<0.$$

Άρα $h(0)\cdot h\left(\frac{1}{e}\right)<0$, οπότε από το Θεώρημα Bolzano υπάρχει $\alpha\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$ ώστε $h(\alpha)=0$.

Ακόμα ισχύει ότι $h(1)=f(1)-\frac{1}{e}\cdot 1+\frac{1}{e}=0-\frac{1}{e}+\frac{1}{e}=0$,

δηλαδή το 1 είναι επίσης ρίζα της h.

Έστω ότι η εξίσωση $h(x)=0$ έχει 3 άνισες ρίζες $\rho_1<\rho_2<\rho_3$.

Τότε έχουμε ότι

- h συνεχής στα $[\rho_1,\rho_2]$ και $[\rho_2,\rho_3]$
- h παραγωγίσιμη στα (ρ_1,ρ_2) και (ρ_2,ρ_3)
- και $h(\rho_1)=h(\rho_2)=h(\rho_3)(=0)$.

Από το Θεώρημα Rolle

- υπάρχει $\xi_1\in(\rho_1,\rho_2)$ ώστε $h'(\xi_1)=0$
- υπάρχει $\xi_2\in(\rho_2,\rho_3)$ ώστε $h'(\xi_2)=0$

Όμως $h'(x)=\left(x\ln x-\frac{1}{e}x+\frac{1}{e}\right)'=\ln x+1-\frac{1}{e}$.

Ακόμη:

- h' συνεχής στο $[\xi_1,\xi_2]$
- h' παραγωγίσιμη στο (ξ_1,ξ_2) με $h''(x)=\frac{1}{x}$
- $h'(\xi_1)=h'(\xi_2)\ (=0)$.

Άρα από το Θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subseteq (0, +\infty)$ τέτοιο ώστε $h''(\xi)=0 \Rightarrow \frac{1}{\xi}=0$ που είναι άτοπο.

Άρα οι ρίζες α και 1 είναι μοναδικές, δηλαδή η ευθεία $y=\frac{1}{e}x-\frac{1}{e}$ τέμνει την C_f ακριβώς σε 2 σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(1,0)$.

Γ4. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\ln\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}<\ln\alpha^{\alpha}<\ln 1 \Rightarrow \frac{1}{e}\ln\frac{1}{e}<\alpha\cdot\ln\alpha<0 \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{e}\right)<f(\alpha)<f(0)$$

Όμως ισχύει ότι $f'(x)=\ln x+1$ για $x>0$

και αν $f'(x)=0 \Leftrightarrow \ln x=-1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{e}$

και αν $f'(x)>0 \Leftrightarrow \ln x>-1 \Leftrightarrow x>\frac{1}{e}$.

Άρα f γν. φθίνουσα στο $\left[0,\frac{1}{e}\right]$ και f γν. αύξουσα στο $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$ και επειδή

$0<\alpha<\frac{1}{e} \Rightarrow f\left(\frac{1}{e}\right)<f(\alpha)<f(0)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Ισχύει ότι

$$\frac{1-2f(x)}{f^2(x)}=x^4-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-2f(x)=x^4\cdot f^2(x)-f^2(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^2(x)-2f(x)+1=x^4\cdot f^2(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (f(x)-1)^2=x^4\cdot f^2(x) \qquad (1)$$

Αν $x\neq 0$ έχουμε

$x^4 \cdot f^2(x) > 0$ άρα $\left(f(x)-1\right)^2 > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x)-1 \neq 0$ για κάθε $x \in (-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

Θεωρώ $h(x) = f(x) - 1$ η οποία είναι συνεχής στα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$, άρα θα διατηρεί σταθερό πρόσημο σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$ (όχι κατ' ανάγκη το ίδιο).

Όμως $h(1) = f(1) - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} < 0$ και

$h(-1) = f(-1) - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow f(x)-1<0 \quad \forall x \in (-\infty,0)\cup(0,+\infty) \\ (1) \overset{x=0}{\Rightarrow} f(0)-1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)-1 \leq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Επιπλέον από την αρχική σχέση έχουμε ότι $f(x) \neq 0$ και αφού f συνεχής και $f(0) = 1 > 0$ ισχύει ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα $0 < f(x) \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και από τη σχέση (1) προκύπτει

$|f(x)-1| = x^2 \cdot |f(x)| \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 - f(x) = x^2 \cdot f(x) \Rightarrow$

$\Leftrightarrow 1 = f(x)\cdot\left(x^2+1\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ2. Ισχύει ότι $E = \int_0^1 |F(x)|\,dx$

Ισχύει ότι $F'(x) = f(x) = \frac{1}{x^2+1} > 0$, άρα F γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$ επομένως

$F(x) \geq F(0) \geq 0$ για κάθε $x \in [0,1]$. Άρα

$$E=\int_0^1 F(x)dx=\int_0^1 x'\cdot F(x)dx=$$
$$=\left[x\cdot F(x)\right]_0^1-\int_0^1 x\cdot F'(x)dx=$$
$$=1\cdot F(1)-0\cdot F(0)-\int_0^1 x\cdot\frac{1}{x^2+1}dx=$$
$$=F(1)-\int_0^1\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(x^2+1\right)'}{x^2+1}dx=F(1)-\frac{1}{2}\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_0^1=$$
$$=F(1)-\frac{1}{2}(\ln 2-\ln 1)=F(1)-\frac{1}{2}\ln 2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow E=F(1)-\ln\sqrt{2}.$$

Δ3. Ισχύει ότι $E(\Omega)=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left|f(x)\right|dx=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{1}{x^2+1}dx$

Έστω $x=\lambda$ η κατακόρυφη ευθεία που χωρίζει το χωρίο Ω σε 2 ισεμβαδικά χωρία. Τότε ισχύει ότι

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\lambda}\frac{1}{x^2+1}dx=\int_{\lambda}^{2}\frac{1}{x^2+1}dx \qquad (1)$$

όπου $\frac{1}{2}<\lambda<2.$

Όμως αν θέσουμε

$$u=\frac{1}{x}\Rightarrow x=\frac{1}{u}\Rightarrow dx=-\frac{1}{u^2}du$$

έχουμε ότι $u_1=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2,\ u_2=\frac{1}{\lambda}$ και ισχύει

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\lambda}\frac{1}{x^2+1}dx=\int_{2}^{\frac{1}{\lambda}}\frac{1}{\frac{1}{u^2}+1}\cdot\left(-\frac{1}{u^2}\right)du=$$

$$=\int_{\frac{1}{\lambda}}^{2}\frac{1}{\frac{1+u^2}{u^2}}\cdot\frac{1}{u^2}du=\int_{\frac{1}{\lambda}}^{2}\frac{1}{u^2+1}du$$

Άρα $\int_{\frac{1}{2}}^{\lambda}\frac{1}{x^2+1}dx=\int_{\frac{1}{\lambda}}^{2}\frac{1}{x^2+1}dx$ (2)

Από (1),(2) $\Rightarrow$ $\int_{\frac{1}{\lambda}}^{2}\frac{1}{x^2+1}dx=\int_{\lambda}^{2}\frac{1}{x^2+1}dx\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\int_{\frac{1}{\lambda}}^{2}\frac{1}{x^2+1}dx-\int_{\lambda}^{2}\frac{1}{x^2+1}dx=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\int_{\frac{1}{\lambda}}^{\lambda}\frac{1}{x^2+1}dx=0.$$

Όμως αν F παράγουσα της
$f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ ισχύει ότι

$$\int_{\frac{1}{\lambda}}^{\lambda}\frac{1}{x^2+1}dx=\left[F(x)\right]_{\frac{1}{\lambda}}^{\lambda}=F(\lambda)-F\left(\tfrac{1}{\lambda}\right)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(\lambda)=F\left(\tfrac{1}{\lambda}\right)$$

Αλλά η F είναι γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$ (από Δ.2) άρα F 1-1

$$\Rightarrow\lambda=\frac{1}{\lambda}\Leftrightarrow\lambda^2=1\overset{\lambda>0}{\Rightarrow}\lambda=1.$$

<u>Αλλιώς</u>
Αν υποθέσουμε ότι
$\frac{1}{\lambda}\neq\lambda$ π.χ. $\frac{1}{\lambda}<\lambda$ τότε αφού
$\frac{1}{x^2+1}>0$ ισχύει ότι
$\int_{\frac{1}{\lambda}}^{\lambda}\frac{1}{x^2+1}dx>0$ που είναι <u>άτοπο</u> αφού $\int_{\frac{1}{\lambda}}^{\lambda}\frac{1}{x^2+1}dx=0.$

Δ4. Αν $A\left(x\,(t),\,y\,(t)\right)$ με $x\,(t)\geq 1$ τότε η ταχύτητα με την οποία το A απομακρύνεται από τον yy' είναι ίση με $x'(t)$ και είναι προφανώς θετική, αφού η τετμημένη $x\,(t)$ αυξάνεται, ενώ η ταχύτητα με την οποία το A πλησιάζει τον xx' ισούται με $y'(t)$ όπου

$$y'(t)=\left(\frac{1}{x^2(t)+1}\right)'=-\frac{1}{\left(x^2(t)+1\right)^2}\cdot\left(x^2(t)+1\right)'\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'(t)=\frac{-2x(t)\cdot x'(t)}{\left(x^2(t)+1\right)^2}<0,\quad \text{αφού } x(t)\geq 1 \text{ και } x'(t)>0.$$

Αν τη χρονική στιγμή t_0 το μέτρο της ταχύτητας με την οποία το A απομακρύνεται από τον yy' είναι διπλάσιο του μέτρου της ταχύτητας με την οποία πλησιάζει τον xx' ισχύει ότι:

$$\left|x'(t_0)\right|=2\left|y'(t_0)\right|\Leftrightarrow x'(t_0)=\frac{4x(t_0)\cdot x'(t_0)}{\left(x^2(t_0)+1\right)^2}\overset{:x'(t_0)>0}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow\left(x^2(t_0)+1\right)^2=4x(t_0)\Leftrightarrow x^4(t_0)+2x^2(t_0)-4x(t_0)+1=0$$

Θέτουμε $x(t_0)=\omega$ με $\omega\geq 1$. Τότε η εξίσωση γίνεται:

$\omega^4+2\omega^2-4\omega+1=0$.

Θεωρούμε συνάρτηση k με $k(\omega)=\omega^4+2\omega^2-4\omega+1,\quad \omega\geq 1$ και έχουμε:

- $k(1)=0$
- $k'(\omega)=4\omega^3+4\omega-4=4\left(\omega^3+\omega-1\right)>0$, για κάθε $\omega\geq 1$.

Άρα η k είναι γνησίως αύξουσα και η $\omega=1$ είναι η μοναδική ρίζα της.

Επομένως $\omega=x(t_0)=1$ και το ζητούμενο σημείο είναι το

$$A\left(x(t_0),\,y(t_0)\right)\ \rightarrow\ A\left(1,\ \frac{1}{2}\right).$$