ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΠΑ.Λ.

Σάββατο 4 Μαΐου 2019 | Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία, Σχολικό βιβλίο, σελ. 30.

Α2. Μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A λέγεται συνεχής, αν για κάθε $x_0 \in A$ ισχύει $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Α3. **α)** Ψευδής

β) Αν ο αριθμός ν είναι άρτιος, η διάμεσος ισούται με το μέσο όρο των δύο μεσαίων παρατηρήσεων, ο οποίος ενδέχεται να μην συμπίπτει με καμία από τις παρατηρήσεις.

Α4. **i)** Σωστό
ii) Σωστό
iii) Λάθος
iv) Σωστό
v) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$$\alpha=\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{2\sqrt{x+5}-4}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(2\sqrt{x+5}+4)}{(2\sqrt{x+5}-4)(2\sqrt{x+5}+4)}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(2\sqrt{x+5}+4)}{4(x+5)-16}=$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(2\sqrt{x+5}+4)}{4x+4}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(2\sqrt{x+5}+4)}{4(x+1)}=\frac{8}{4}=2.$$

Β2. Πρέπει $x^2+1\neq 0$

Δ = 0 – 4= –4 < 0. Οπότε A = IR.

Β3. $f(x)=\dfrac{2x^2+3x-2}{x^2+1}$

$$f'(x)=\frac{(4x+3)(x^2+1)-(2x^2+3x-2)2x}{(x^2+1)^2}=\frac{4x^3+4x+3x^2+3-4x^3-6x^2+4x}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{-3x^2+8x+3}{(x^2+1)^2}.$$

Β4. Εξίσωση εφαπτομένης: $y=\lambda x+\beta$.

$$y=f(-1)=\frac{2(-1)^2+3(-1)-2}{(-1)^2+1}=-\frac{3}{2}$$

$$\lambda=f'(-1)=\frac{-3(-1)^2+8(-1)+3}{[(-1)^2+1]^2}=\frac{-8}{4}=-2.$$

Αντικαθιστώντας προκύπτει: $-\dfrac{3}{2}=(-2)(-1)\ +\beta$.

Άρα $\beta=-\dfrac{3}{2}-2=-\dfrac{7}{2}$.

Τελικά, η ζητούμενη εξίσωση εφαπτομένης είναι: $y=-2x-\dfrac{7}{2}$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $\nu_1 = 2$, $N_1 = \nu_1 = 2$, $f_1\% = (2/20)100 = 10$,
$\nu_2 = 9$, $N_2 = \nu_1 + \nu_2 = 11$, $f_2\% = (9/20)100 = 45$,
$\nu_3 = 6$, $N_3 = N_2 + \nu_3 = 17$, $f_3\% = (6/20)100 = 30$,
$\nu_4 = 3$, $N_4 = N_3 + \nu_4 = 20$, $f_4\% = (3/20)100 = 15$

Κλάσεις	Κεντρική τιμή κ_i	ν_i	$f_i\%$	N_i	$\kappa_i \cdot \nu_i$
[2, 6)	4	2	10	2	8
[6, 10)	8	9	45	11	72
[10, 14)	12	6	30	17	72
[14, 18)	16	3	15	20	48
Σύνολο	–	ν=20	100	–	200

Γ2. $$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{4} \kappa_i \cdot \nu_i}{\nu} = \frac{200}{20} = 10.$$

Γ3. Το ποσοστό πόλεων με θερμοκρασία τουλάχιστον 12 είναι $\frac{f_3\%}{2} + f_4\% = 15 + 15 = 30$.

Γ4. $$s^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{4}\left(\kappa_i - \bar{x}\right)^2 \cdot \nu_i = \frac{240}{20} = 12.$$

$s = \sqrt{12} \approx 3{,}5$.

$CV = \frac{s}{\bar{x}}100\% = \frac{3{,}5}{10}100\% = 35\% > 10\%$, άρα το δείγμα είναι ανομοιογενές.

Γ5. Για να γίνει ομοιογενές πρέπει CV ≤ 10%.

Αφού προσθέτουμε c έχουμε ότι: $s_{νέο} = s = 3{,}5$ και $\bar{x}_{νέο} = \bar{x} + c = 10 + c$.

Άρα $\frac{3{,}5}{10+c} \le \frac{10}{100} \Rightarrow 350 \le 100 + 10c \Rightarrow 250 \le 10c \Rightarrow c \ge 25$.

Οπότε $c = 25$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έστω x και y οι διαστάσεις του ορθογωνίου (όπου x η διάσταση του τοίχου που θα χρησιμοποιηθεί).

Το συρματόπλεγμα που θα χρησιμοποιηθεί ισούται με 40 m, άρα $x+2y=40$.

Οπότε $y=\frac{40-x}{2}$ (1)

Το εμβαδό του ορθογωνίου δίνεται από τον τύπο $E = xy$ και λόγω της (1) έχουμε ότι $E=x\frac{40-x}{2}=\frac{40x-x^2}{2}=\frac{40x}{2}-\frac{x^2}{2}=-\frac{1}{2}x^2+20x$.

Άρα: $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+20x$, για $0\le x\le 40$

Δ2. Ο ρυθμός μεταβολής του Εμβαδού του ορθογωνίου είναι

$$f'(x)=\left(-\frac{1}{2}x^2+20x\right)'=-\frac{1}{2}2x+20\cdot 1=-x+20$$

Δ3. Θα μελετήσουμε την f ως προς τα ακρότατα.

$f'(x)=0\Leftrightarrow x=20$

Ο πίνακας μεταβολών της f είναι:

x	0		20		40
$f'(x)$		+	0	–	
f		↗	Max	↘	

Η f παρουσιάζει μέγιστο για $x = 20$, την τιμή $f(20)=-\frac{1}{2}20^2+20\cdot 20=200$.

Επίσης όταν $x = 20$, από την (1) έχουμε $y=\frac{40-20}{2}=10$.

Επομένως, η μέγιστη δυνατή επιφάνεια που μπορούμε να περιφράξουμε είναι $200\,m^2$ και οι διαστάσεις της περιφραγμένης περιοχής είναι $x = 20$ m και $y = 10$ m.

Δ4. Ισχύει ότι $20<29<30<31<40$. Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο [20, 40] από το ερώτημα Δ3, έχουμε ότι $f(40)<f(31)<f(30)<f(29)<f(20)$.

Άρα, για $\nu = 5$ (περιττός) η διάμεσος είναι η μεσαία παρατήρηση,

$$\delta = f(30) = -\frac{1}{2}30^2 + 20\cdot 30 = -450 + 600 = 150$$

Το εύρος είναι $R = \max - \min = f(20) - f(40) = 200 - 0 = 200$.