# ΑΛΓΕΒΡΑ

## Β' Γενικού Λυκείου

### Γενικής Παιδείας

Σάββατο 4 Μαΐου 2019| Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

# ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

## ΘΕΜΑ Α

**Α1.** Σχολικό βιβλίο σελ. 135.

**Α2.**
**i.** Λ
**ii.** Σ
**iii.** Σ
**iv.** Σ
**v.** Σ

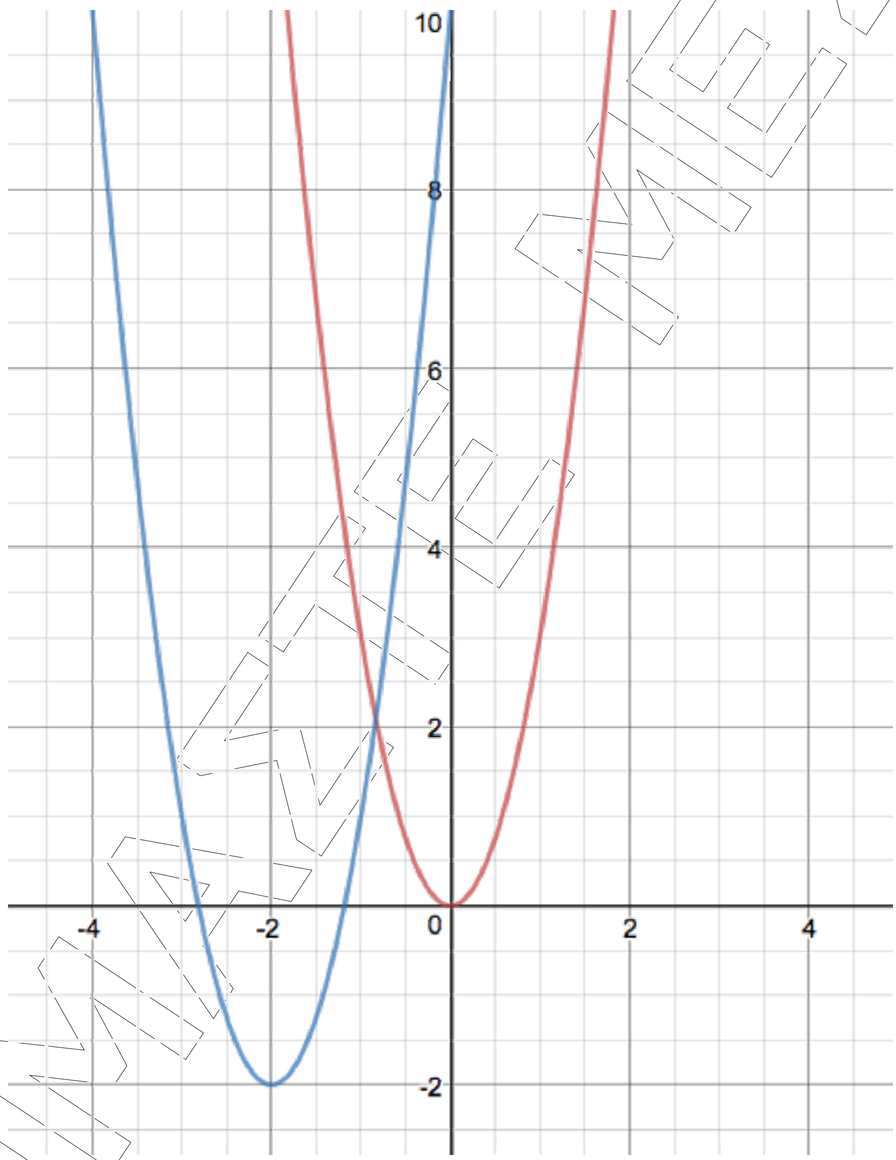
**Α3.**
**i.** συν$2\alpha$
**ii.** $-$ημ$\alpha$
**iii** σφ$\alpha$
**iv.** σφ$\alpha$
**v.** ημ$\alpha$

## ΘΕΜΑ Β

**Β1.** $f(x)=3x^2+12x+10$

$$f(x)=3x^2+12x+10=3x^2+12x+12-2=3(x^2+4x+4)-2$$
$$=3(x+2)^2-2.$$

**B2.** Η συνάρτηση $f(x)=3(x+2)^2-2$ προκύπτει μμετατοπίζοντας τη γραφική παράσταση της $h(x)=3x^2$ κατά δύο μονάδες προς τα αριστερά και κατά δύο μονάδες προς τα κάτω όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:




**B3.** **i.** Η συνάρτηση $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty,-2]$

**ii.** Η συνάρτηση $f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-2,+\infty)$

**iii.** Η συνάρτηση $f$ παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο για $x=-2$ το $f(-2)=-2$

## ΘΕΜΑ Γ

**Γ1.** Επειδή πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα $x - 2$ ισχύει ότι $P(2) = 0$.
Επειδή το υπόλοιπο της διαίρεσης του με το $x + 1$ είναι $-18$ ισχύει $P(-1) = -18$.
Επειδή το $(x - 2)(x + 1)$ είναι 2ου βαθμού, το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x - 2)(x + 1)$ θα είναι το πολύ 1ου βαθμού. Έστω $\upsilon(x) = \alpha x + \beta$, τότε:

$$P(x)=(x-2)(x+1)\pi(x)+\alpha x+\beta.$$

$$P(2)=0 \Leftrightarrow (2-2)(2+1)\pi(2)+2\alpha+\beta=0 \Leftrightarrow 2\alpha+\beta=0 \quad (1)$$

$$P(-1)=-18 \Leftrightarrow (-1-2)(-1+1)\pi(-1)-\alpha+\beta=-18 \Leftrightarrow -\alpha+\beta=-18 \quad (2)$$

Από το σύστημα των (1), (2) προκύπτει $\alpha = 6$ και $\beta = -12$ άρα $\upsilon(x) = 6x - 12$.

**Γ2.** Με βάση το σύστημα Horner το $P(x)$ γράφεται

$$P(x)=(x-2)(2x^2-3x+1)=(x-2)(x-1)(2x-1)$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | −7 | 7 | −2 | ρ = 2 |
| | 4 | −6 | 2 | |
| 2 | −3 | 1 | 0 | |

| $x$ | $-\infty$ | | $1/2$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-2$ | | − | | − | | − | 0 | + | |
| $x-1$ | | − | | − | 0 | + | | + | |
| $2x-1$ | | − | 0 | + | | + | | + | |
| $P(x)$ | | − | 0 | + | 0 | − | 0 | + | |

$$P(x)<0 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\cup(1,2)$$

**Γ3.** Πρέπει $P(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\in\left(\frac{1}{2},1\right)\cup(2,+\infty)$, άρα $A_f=\left(\frac{1}{2},1\right)\cup(2,+\infty)$

**Γ4.** $P^2(x) > -2P(x) \Leftrightarrow P^2(x) + 2P(x) > 0 \Leftrightarrow P(x)\left(P(x)+2\right) > 0 \Leftrightarrow$

$(x-2)(x-1)(2x-1)(2x^3-7x^2+7x) > 0 \Leftrightarrow$

$(x-2)(x-1)(2x-1)x(2x^2-7x+7) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,0) \cup \left(\frac{1}{2},1\right) \cup (2,+\infty)$

| $x$ | $-\infty$ 0 | 1/2 | 1 | 2 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | − | + | + | + | + |
| $x-2$ | − | − | − | − | + |
| $x-1$ | − | − | − | + | + |
| $2x-1$ | − | − | + | + | + |
| $2x^2-7x+7$ | + | + | + | + | + |
| $P(x)$ | + | − | + | − | + |

## ΘΕΜΑ Δ

**Δ1.** $e^{2x} + e^{x+1} - e^x - e = 0 \Leftrightarrow e^{2x} + e \cdot e^x - e^x - e = 0 \Leftrightarrow e^x\left(e^x+e\right) - \left(e^x+e\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\left(e^x-1\right)\left(e^x+e\right) = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 = e^0 \Leftrightarrow x = 0.$

**Δ2.** Πρέπει $e^{2x} + e^{x+1} - e^x - e \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ και

$$\frac{e^{2x}-e^2}{e^{2x}+e^{x+1}-e^x-e} > 0 \Leftrightarrow \frac{\left(e^x-e\right)\cdot\cancel{\left(e^x+e\right)}}{\left(e^x-1\right)\cdot\cancel{\left(e^x+e\right)}} > 0 \Leftrightarrow \frac{\left(e^x-e\right)}{\left(e^x-1\right)} > 0 \Leftrightarrow \left(e^x-e\right)\left(e^x-1\right) > 0$$

$e^x - e \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq e = e^1 \Leftrightarrow x \geq 1$

$e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 = e^0 \Leftrightarrow x \geq 0$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $e^x - e$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $e^x - 1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $(e^x - e)(e^x - 1)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Άρα $A_f = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

**Δ3.** $f(x) = \ln\dfrac{e^{2x} - e^2}{e^{2x} + e^{x+1} - e^x - e} = \ln\dfrac{(e^x - e)\cdot\cancel{(e^x + e)}}{(e^x - 1)\cdot\cancel{(e^x + e)}} = \ln\dfrac{e^x - e}{e^x - 1}$

**Δ4.** $A_g$: Πρέπει $e^x - e > 0 \Leftrightarrow e^x > e = e^1 \Leftrightarrow x > 1$ και $e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 = e^0 \Leftrightarrow x > 0$.

Οπότε $A_g = (1, +\infty)$.

Επομένως το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της $f$ βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι το $A = A_f \cap A_g = (1, +\infty)$.

Για να βρίσκεται η γραφική παράσταση της $f$ πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g$ πρέπει:

$$f(x) > g)(x) \Leftrightarrow \ln\frac{e^x - e}{e^x - 1} > \ln(e^x - e) - 2\ln(e^x - 1) \Leftrightarrow$$

$$\ln\frac{e^x - e}{e^x - 1} > \ln(e^x - e) - \ln(e^x - 1)^2 \Leftrightarrow \ln\frac{e^x - e}{e^x - 1} > \ln\frac{e^x - e}{(e^x - 1)^2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{e^x - e}{e^x - 1} > \frac{e^x - e}{(e^x - 1)^2} \Leftrightarrow \frac{e^x - e}{e^x - 1} - \frac{e^x - e}{(e^x - 1)^2} > 0 \Leftrightarrow \frac{(e^x - e)(e^x - 1) - (e^x - e)}{(e^x - 1)^2} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(e^x - e)(e^x - 2)}{(e^x - 1)^2} > 0 \underset{e^x - e > 0}{\overset{(e^x - 1)^2 > 0}{\Longleftrightarrow}} e^x - 2 > 0 \Leftrightarrow e^x > 2 \Leftrightarrow x > \ln 2$$

Επειδή $\ln 2 < \ln e = 1$ οι λύσεις της ανίσωσης είναι το διάστημα $(1, +\infty)$.