ΑΛΓΕΒΡΑ

Α' Γενικού Λυκείου

Σάββατο 4 Μαΐου 2019 | Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο , σελίδα 90.

Α2. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 62.

Α3. Λ – Λ – Λ – Λ – Λ – Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Πρέπει

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow (-4)^2 - 4 \cdot 1|\lambda - 1| \geq 0 \Leftrightarrow 16 - 4|\lambda - 1| \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\lambda - 1| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq \lambda - 1 \leq 4 \Leftrightarrow -3 \leq \lambda \leq 5$$

Β2. $P = x_1 \cdot x_2 = \dfrac{\gamma}{\alpha}$ δηλαδή $P = |\lambda - 1| \geq 2 \Leftrightarrow \lambda - 1 \geq 2$ ή $\lambda - 1 \leq -2$

$\Leftrightarrow \lambda \geq 3$ ή $\lambda \leq -1$

Άρα πρέπει να συναληθεύονται οι (1) και (2)

Άρα $\lambda \in [-3, -1] \cup [3, 5]$.

Β3. Αν $\lambda = 2$ η εξίσωση γίνεται $x^2 - 4x + 1 = 0$, με $S = x_1 + x_2 = 4$ και $P = x_1 \cdot x_2 = 1$.

– $A = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4^2 - 2 \cdot 1 = 16 - 2 = 14$

– $B = x_1^2 x_2^2 = (x_1 x_2)^2 = 1^2 = 1$

– $K = \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \dfrac{4}{1} = 4$

Β4.

$$\frac{|x-K|}{2}=\frac{2|K-x|}{3}-1 \Leftrightarrow \frac{|x-K|}{2}=\frac{2|x-K|}{3}-1$$

$$\Leftrightarrow\ 6\cdot\frac{|x-K|}{2}=6\cdot\frac{2|x-K|}{3}-6\cdot 1 \Leftrightarrow\ 3|x-K|=4|x-K|\text{-}6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ -|x-K|=\text{-}6 \Leftrightarrow |x-K|=6 \Leftrightarrow |x-4|=6\ \Leftrightarrow$$

$$x-4=6 \Leftrightarrow x=10$$

$$x-4=-6 \Leftrightarrow x=-2$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. **α)** $\left(\frac{x}{x-4}\right)^2+\frac{x}{4-x}=2 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{x-4}\right)^2-\frac{x}{x-4}-2=0,\ x\neq 4 \quad (1)$

Θέτω $\frac{x}{x-4}=\kappa$, άρα η εξίσωση (1) γίνεται:

$\kappa^2-\kappa-2=0$ η οποία έχει ρίζες $\kappa_1=2$ και $\kappa_2=-1$.

Έτσι: * $\frac{x}{x-4}=2 \Leftrightarrow x=2x-8 \Leftrightarrow x=8$

* $\frac{x}{x-4}=-1 \Leftrightarrow x=-x+4 \Leftrightarrow x=2$

β) Η γεωμετρική πρόοδος έχει διαδοχικούς όρους: α_1, 2, α_3, 8 άρα $\alpha_3^{\ 2}=2\cdot 8 \Leftrightarrow \alpha_3^{\ 2}=16 \Leftrightarrow \alpha_3=\pm 4$.

Υπάρχουν λοιπόν δύο γεωμετρικές πρόοδοι:

Α: $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = 4, \alpha_4 = 8$ με $\lambda = 2$.

και *Β*: $\alpha_1 = -1, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = -4, \alpha_4 = 8$ με $\lambda = -2$.

άρα προκύπτουν 2 αθροίσματα 7 πρώτων όρων

Α: $S_A=1\cdot\frac{2^7-1}{2-1}=127$ και $S_B=(-1)\cdot\frac{(-2)^7-1}{-2-1}=-1\cdot\frac{-129}{-3}=-43$

Γ2. **α)** Η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3(x - 1) + \kappa$ διέρχεται από το σημείο $M(1, -2)$ αν και μόνο: $f(1) = -2 \Leftrightarrow -2 = 1^2 - 3(1 - 1) + \kappa \Leftrightarrow \kappa = -3$.

β) Αν $\kappa = -3$ η συνάρτηση έχει τύπο $f(x) = x^2 - 3x + 3 - 3 \Leftrightarrow f(x) = x^2 - 3x$.

α. $f(x) \geq x + 21 \Leftrightarrow x^2 - 3x \geq x + 21 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 21 \geq 0$

Το τριώνυμο έχει ρίζες $x_1 = 7$ και $x_2 = -3$.

•		-3		7			
•	+	0	–	0	+		

Άρα $x \in (-\infty, -3] \cup [7, +\infty)$

β. $\dfrac{2017}{2-\sqrt{2019-f(1)}}+\dfrac{2017}{2+\sqrt{2019-f(1)}}=\dfrac{2017}{2-\sqrt{2019+2}}+\dfrac{2017}{2+\sqrt{2019+2}}$

$$\Leftrightarrow \frac{2017\left(2+\sqrt{2021}\right)+2017\left(2-\sqrt{2021}\right)}{4-2021}=\frac{4\cdot 2017}{-2017}=-4$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Πρέπει $\sqrt{x^2-2x+1} \neq 0$ και $x^2-2x+1 \geq 0$

$x^2-2x+1 \neq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1 \quad \text{και} \quad x^2-2x+1 \geq 0,\ x \in R$

Άρα $A_f: (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

Δ2. $$f(x)=\frac{x^2-3x+2}{\sqrt{x^2-2x+1}}=\frac{(x-1)(x-2)}{\sqrt{(x-1)^2}}=\frac{(x-1)(x-2)}{|x-1|}=\begin{cases} x-2, & x>1 \\ -x+2, & x<1 \end{cases}$$

Δ3. $f\left(\sqrt{\alpha\beta}\right) \geq \sqrt{f(\alpha)\cdot f(\beta)} \Leftrightarrow \sqrt{\alpha\beta} - 2 \geq \sqrt{(\alpha-2)(\beta-2)} \Leftrightarrow$

$\alpha\beta - 4\sqrt{\alpha\beta} + 4 \geq \alpha\beta - 2\alpha - 2\beta + 4 \Leftrightarrow -4\sqrt{\alpha\beta} \geq -2(\alpha+\beta) \Leftrightarrow$

$2\sqrt{\alpha\beta} \leq (\alpha+\beta) \Leftrightarrow 4(\alpha\beta) \leq \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \Leftrightarrow$

$\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 \geq 0$ το οποίο ισχύει

Δ4. $g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{f(x)}} = \dfrac{x}{\sqrt{x-2}}$

α)

$$\left.\begin{aligned} g(3) &= \frac{3}{\sqrt{3-2}} = \frac{3}{1} = 3 \\ g(6) &= \frac{6}{\sqrt{6-2}} = \frac{6}{2} = 3 \end{aligned}\right\} : g(3)\cdot\frac{1}{9}\cdot g(6) = 3\cdot\frac{1}{3} = 1$$

β) Η ευθεία αφού διέρχεται από το $O(0,0)$ θα είναι της μορφής $y = \alpha x$ και επειδή διέρχεται από το $A(3,\ f(3))$: $A(3,1)$ ισχύει: $1 = \alpha\cdot 3 \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{1}{3}$. Η ευθεία είναι η $y = \dfrac{1}{3}x$.

Τα κοινά σημεία της με τη συνάρτηση g προκύπτουν από τη λύση του συστήματος

$$\left\{\begin{aligned} y &= \frac{x}{\sqrt{x-2}} \\ y &= \frac{1}{3}x \end{aligned}\right\} \frac{x}{\sqrt{x-2}} = \frac{1}{3}x \Leftrightarrow 3x = x\sqrt{x-2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x - x\sqrt{x-2} = 0 \Leftrightarrow x\left(3 - \sqrt{x-2}\right) = 0$$

$x = 0$, απορρίπτεται $3 = \sqrt{x-2} \Leftrightarrow 9 = x - 2 \Leftrightarrow x = 11$ δηλαδή $A\left(11, \dfrac{11}{3}\right)$.