



ΤΑΞΗ: Γ' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Σάββατο 21 Απριλίου 2018
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[a, \beta]$.

Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[a, \beta]$, τότε να αποδείξετε ότι:

$$\int_a^{\beta} f(t) dt = G(\beta) - G(a)$$

Μονάδες 8

A2. Έστω A ένα υποσύνολο του \mathbb{R} . Τι ονομάζεται πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A .

Μονάδες 3

A3. Να διατυπώσετε το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών.

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $f^{-1} : f(A) \rightarrow \mathbb{R}$ η αντίστροφη, τότε ισχύει: $f(f^{-1}(x)) = x$, για κάθε $x \in A$.

β) Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\text{Αν } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty \text{ τότε: } \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = 0$$

- γ) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε διατηρεί πρόσημο στο Δ .
- δ) Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι παραγωγίσιμες σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού τους και δεν είναι συνεχείς σε αυτό.
- ε) Για κάθε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και δεν παρουσιάζει καμπή, ισχύει $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ ΒΔίνεται η συνάρτηση $f(x) = (1+x) \cdot e^{-x}$, $x \geq 0$.

- B1.** Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 7

- B2.** Να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C της f και να σχεδιάσετε τη C .

Μονάδες 6

- B3.** Αν $g(x) = \ln x$, να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$.

Μονάδες 4

- B4.** Έστω η συνάρτηση $h(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$, $x \geq 1$ και E το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της h , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$, $x = \lambda$ όπου $\lambda > 1$.

Να βρείτε την τιμή του λ ώστε $E = \frac{3}{2}$ τ.μ.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ ΓΔίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x - \alpha$ με $x \in \mathbb{R}$ $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Γ1.** Να βρείτε την τετμημένη του σημείου της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη(ε) διέρχεται από το σημείο $M(\alpha, 0)$ και στην συνέχεια να δείξετε ότι η (ε) έχει μόνο ένα κοινό σημείο με την C_f .

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια λύση $x_0 \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 4

Αν $x = x_0$ η λύση της εξίσωσης $f(x) = 0$ τότε:

Γ3. Να αποδείξετε ότι: $e^{x_0} + 1 < e^{a-x_0} < e^a + 1$.

Μονάδες 6

Γ4. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} συνάρτηση g για την οποία ισχύει:

$$g(e^x) \leq g(a-x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο με τετμημένη $x = e^{x_0}$, όπου x_0 του ερωτήματος Γ2 είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Μονάδες 5

β) Αν επί πλέον δίνεται ότι η g είναι κοίλη, να μελετήσετε τη μονοτονία της g .

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Αν για μια συνάρτηση f ορισμένη στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει:

$$(f'(x) - x) \cdot e^{f(x) - \frac{x^2}{2}} + \eta\mu x = 0 \text{ για κάθε } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ και } f(0) = 0,$$

τότε να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{x^2}{2} + \ln(\sigma\upsilon\nu x)$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f για $x = 0$ παρουσιάζει μοναδικό μέγιστο.

Μονάδες 7

Δ3. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x}{f(x)}$

Μονάδες 5

Δ4. Να αποδείξετε ότι $2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx > 1$

Μονάδες 8