ΤΑΞΗ: **Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΜΑΘΗΜΑ: **ΑΛΓΕΒΡΑ**

Ημερομηνία: Σάββατο 21 Απριλίου 2018
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία. Σχολικό βιβλίο σελίδες 62-63.

Α2. **α.** Λάθος **β.** Λάθος **γ.** Σωστό **δ.** Σωστό **ε.** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. α. $x^2-5x+4=0$ $\quad \Delta=(-5)^2-4\cdot 1\cdot 4=25-16=9$

$$x_{1,2}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{9}}{2\cdot 1}=\frac{5\pm 3}{2}. \qquad x_1=1 \qquad x_2=4$$

β. Ισχύει $|x|^2=x^2$. Επομένως η εξίσωση γίνεται $|x|^2-5|x|+4=0$

Θέτουμε $|x|=\omega$, οπότε πρέπει να είναι $\omega\geq 0$ (1). Έτσι η εξίσωση γίνεται $\omega^2-5\omega+4=0$ η οποία έχει λύσεις, όπως φαίνεται από το προηγούμενο ερώτημα, τους αριθμούς 1 και 4. Και οι δύο λύσεις γίνονται δεκτές αφού ικανοποιούν την (1).

Έτσι έχουμε: $\omega=1\Leftrightarrow|x|=1\Leftrightarrow x=1$ ή $x=-1$ και

$\omega=4\Leftrightarrow|x|=4\Leftrightarrow x=4$ ή $x=-4$

Επομένως η εξίσωση έχει λύσεις τους αριθμούς $-4,\ -1,\ 1,\ 4$

γ. **$1^{ος}$ τρόπος**

$$(x-1)^2=3(x-1)\Leftrightarrow x^2-2x+1=3x-3\Leftrightarrow x^2-2x+1-3x+3=0\Leftrightarrow x^2-5x+4=0$$

Επομένως οι λύσεις είναι $x_1=1$, $x_2=4$ σύμφωνα με το α ερώτημα.

$2^{ος}$ τρόπος

$$(x-1)^2=3(x-1)\Leftrightarrow (x-1)^2-3(x-1)=0\Leftrightarrow (x-1)\left[(x-1)-3\right]=0\Leftrightarrow (x-1)(x-4)=0$$

$$\Leftrightarrow x-1=0 \quad ή \quad x-4=0\Leftrightarrow x=1 \quad ή \quad x=4$$

$3^{ος}$ τρόπος

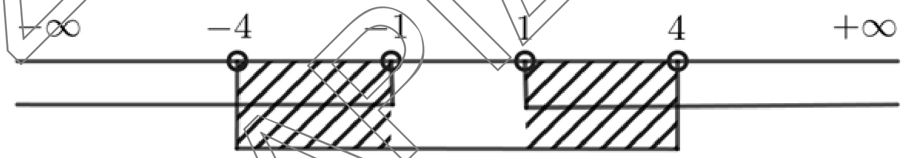
Εύκολα παρατηρούμε ότι η x=1 είναι λύση της εξίσωσης. Αναζητούμε λύσεις για $x\neq 1$. Τότε είναι $x-1\neq 0$. Διαιρούμε και τα δύο μέλη της αρχικής με $x-1$ οπότε έχουμε x-1=3 ή x=4. Επομένως η εξίσωση έχει τελικά, λύσεις x=1 , x=4

Β2. Σύμφωνα με όσα έχουμε από τη λύση του Β1.β. η ανίσωση γίνεται $\omega^2-5\omega+4<0$.

Το τριώνυμο του πρώτου μέλους έχει θετικό συντελεστή στο δευτεροβάθμιο όρο του.

Επομένως, από τον κανόνα του προσήμου τριωνύμου θα παίρνει αρνητικές τιμές για 1<ω<4 οπότε λόγω και της (1) έχουμε τελικά:

$$1<\omega<4\Leftrightarrow 1<|x|<4\Leftrightarrow \left(|x|>1 \text{ και } |x|<4\right)\Leftrightarrow\left[\left(x<-1 \quad ή \quad x>1\right) \text{ και } -4<x<4\right]$$



Από τη συναλήθευση των παραπάνω σχέσεων προκύπτει τελικά ότι $x\in(-4\ ,\ -1)\cup(1\ ,\ 4)$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $A=\sqrt[3]{4\sqrt{2+\sqrt[5]{32}}}=\sqrt[3]{4\sqrt{2+\sqrt[5]{2^5}}}=\sqrt[3]{4\sqrt{2+2}}=\sqrt[3]{4\sqrt{4}}=\sqrt[3]{8}=2$

$B=\left(\sqrt{\pi-2}\right)^2+\sqrt{(\pi-4)^2}+1=\pi-2+|\pi-4|+1=\pi-2-\pi+4+1=3$

διότι $2<\pi<4 \Leftrightarrow (\pi-2>0 \quad \text{και} \quad \pi-4<0)$

Γ2. **<u>1^{ος} τρόπος</u>**

$$\left(\frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}}{\sqrt{A}-\sqrt{B}}+\frac{\sqrt{A}-\sqrt{B}}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}\right)\cdot\frac{A-B}{A+B}=\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right)\cdot\frac{2-3}{2+3}$$

$$=\left(\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2}{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}+\frac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}\right)\cdot\frac{-1}{5}$$

$$=\left(\frac{\left(\sqrt{2}\right)^2+2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}+\frac{\left(\sqrt{2}\right)^2-2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}\right)\cdot\frac{-1}{5}$$

$$=\left(\frac{2+2\sqrt{6}+3}{2-3}+\frac{2-2\sqrt{6}+3}{2-3}\right)\cdot\frac{-1}{5}$$

$$=\frac{2+2\sqrt{6}+3+2-2\sqrt{6}+3}{-1}\cdot\frac{-1}{5}$$

$$=\frac{10}{-1}\cdot\frac{-1}{5}=\frac{-10}{-5}=2$$

2ος τρόπος

$$\left(\frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}}{\sqrt{A}-\sqrt{B}}+\frac{\sqrt{A}-\sqrt{B}}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}\right)\cdot\frac{A-B}{A+B}=$$

$$=\left(\frac{\left(\sqrt{A}+\sqrt{B}\right)^2}{\left(\sqrt{A}-\sqrt{B}\right)\left(\sqrt{A}+\sqrt{B}\right)}+\frac{\left(\sqrt{A}-\sqrt{B}\right)^2}{\left(\sqrt{A}+\sqrt{B}\right)\left(\sqrt{A}-\sqrt{B}\right)}\right)\cdot\frac{A-B}{A+B}$$

$$=\left(\frac{\left(\sqrt{A}\right)^2+2\sqrt{A}\cdot\sqrt{B}+\left(\sqrt{B}\right)^2}{\left(\sqrt{A}\right)^2-\left(\sqrt{B}\right)^2}+\frac{\left(\sqrt{A}\right)^2-2\sqrt{A}\cdot\sqrt{B}+\left(\sqrt{B}\right)^2}{\left(\sqrt{A}\right)^2-\left(\sqrt{B}\right)^2}\right)\cdot\frac{A-B}{A+B}$$

$$=\left(\frac{A+2\sqrt{A\cdot B}+B}{A-B}+\frac{A-2\sqrt{A\cdot B}+B}{A-B}\right)\cdot\frac{A-B}{A+B}$$

$$=\frac{A+2\sqrt{A\cdot B}+B+A-2\sqrt{A\cdot B}+B}{A-B}\cdot\frac{A-B}{A+B}$$

$$=\frac{2(A+B)}{A-B}\cdot\frac{A-B}{A+B}=2$$

Γ3. **(α)**

$$\begin{cases}|Ax-B|=B-Ax\\ A=2\\ B=3\end{cases}\Leftrightarrow|2x-3|=3-2x\Leftrightarrow 2x-3\le 0\Leftrightarrow x\le\frac{3}{2}$$

(β) Για να ορίζεται η παράσταση πρέπει:

$$|Ax-B|-(B-Ax)\neq 0\Leftrightarrow|Ax-B|\neq B-Ax$$
$$\Leftrightarrow|2x-3|\neq 3-2x$$
$$\Leftrightarrow x>\frac{3}{2}$$

διότι, από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε ότι,

$$|2x-3|=3-2x\Leftrightarrow x\le\frac{3}{2}$$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. $\Delta = \left[-(\lambda-2)\right]^2 - 4\cdot 1\cdot(2\lambda+1) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 - 8\lambda - 4 = \lambda^2 - 12\lambda$

Αφού το τριώνυμο έχει δύο άνισες ρίζες, ισχύει:

$\Delta > 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 12\lambda > 0 \Leftrightarrow \lambda < 0 \;\; \text{ή} \;\; \lambda > 12 \Leftrightarrow \lambda \in (-\infty, 0) \cup (12, +\infty)$

λ	$-\infty$		0		12		$+\infty$
$\lambda^2 - 12\lambda$		$+$	0	$-$	0	$+$	

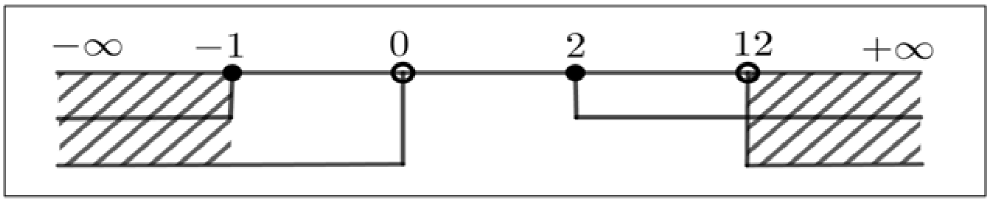
Δ2. **(α)**

- $S = x_1 + x_2 = -\dfrac{\beta}{\alpha} = -\dfrac{-(\lambda-2)}{1} = \lambda - 2$
- $P = x_1 x_2 = \dfrac{\gamma}{\alpha} = \dfrac{2\lambda+1}{1} = 2\lambda + 1$

(β)

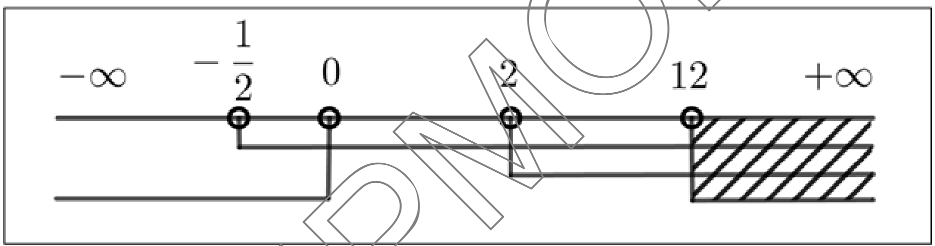
$$\begin{aligned} x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_1 + x_2 \geq 0 &\Leftrightarrow x_1 x_2 (x_1 + x_2) + x_1 + x_2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (x_1 + x_2)(x_1 x_2 + 1) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (\lambda - 2)(2\lambda + 1 + 1) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (\lambda - 2)(2\lambda + 2) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 2(\lambda - 2)(\lambda + 1) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda \leq -1 \;\; \text{ή} \;\; \lambda \geq 2 \end{aligned}$$

και επειδή $\lambda \in (-\infty, 0) \cup (12, +\infty)$ είναι τελικά $\lambda \leq -1$ ή $\lambda > 12$.



Δ3. **(α)** Για να αποτελούν, οι ρίζες x_1, x_2 του παραπάνω τριωνύμου, διαστάσεις ορθογωνίου, πρέπει να είναι θετικοί αριθμοί. Αυτό συμβαίνει όταν ισχύουν οι σχέσεις:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda < 0 \text{ ή } \lambda > 12 \\ 2\lambda + 1 > 0 \\ \lambda - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda < 0 \text{ ή } \lambda > 12 \\ \lambda > -\dfrac{1}{2} \\ \lambda > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ \lambda > 12 \right.$$



(β) Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι

$$\Pi = 2x_1 + 2x_2 = 2(x_1 + x_2) = 2S = 2(\lambda - 2)$$

Επομένως,

$$\begin{cases} \Pi = 2(\lambda - 2) \\ \Pi = 28 \end{cases} \Leftrightarrow 2(\lambda - 2) = 28 \Leftrightarrow \lambda - 2 = 14 \Leftrightarrow \lambda = 16 > 12 \ \text{(δεκτή)}$$

<u>Υπολογισμός εμβαδού:</u>

<u>1ος τρόπος:</u>

$$E = x_1 x_2 = P = 2\lambda + 1 = 2 \cdot 16 + 1 = 33\,\text{cm}^2$$

<u>2ος τρόπος:</u>

Για $\lambda = 16$ το τριώνυμο γίνεται: $x^2 - 14x + 33 = 0$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-14)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 33 = 196 - 132 = 64 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{14 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{14 \pm 8}{2} = \left\langle \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{22}{2} = 11 \\ x_2 = \dfrac{6}{2} = 3 \end{array} \right.$$

Επομένως, $E = x_1 \cdot x_2 = 11 \cdot 3 = 33\,\text{cm}^2$