ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ' Γενικού Λυκείου

Θετικών Σπουδών / Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής

Σάββατο 21 Απριλίου 2018 | Διάρκεια Εξέτασης:3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 216: Θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού.

Α2. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 142.

Α3. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 33.

Α4. **α)** Σωστό **β)** Λάθος **γ)** Λάθος **δ)** Σωστό **ε)** Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ έχουμε ότι η f είναι και συνεχής στο $\mathbb{R}$, επομένως είναι συνεχής και στο $x_0=1$, άρα $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=f(1)$.

Όμως

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\left(\alpha x^3-x^2\right)=\alpha-1=f(1)\\ \lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\left(x\cdot\ln(\beta x)\right)=\ln\beta\end{array}\right\}\Rightarrow \alpha-1=\ln\beta \quad \mathbf{(1)}$$

Ακόμη, η f είναι και παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ άρα

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

Αλλά $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\alpha x^3-x^2-(\alpha-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\alpha(x^3-1)-(x^2-1)}{x-1}=$

$=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\alpha(x-1)(x^2+x+1)-(x-1)(x+1)}{x-1}=3\alpha-2$ και

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x\cdot\ln(\beta x)-(\alpha-1)}{x-1}\overset{(1)}{=}\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x\cdot\ln(\beta x)-\ln\beta}{x-1}\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}$

$=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\ln(\beta x)+\cancel{x}\cdot\dfrac{1}{\cancel{\beta}\cancel{x}}\cdot\cancel{\beta}}{1}=\ln\beta+1$

Άρα: $3\alpha-2=\ln\beta+1\quad(\mathbf{2})$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι:

$3\alpha-2=\alpha-1+1\Leftrightarrow 3\alpha-\alpha=2\Leftrightarrow 2\alpha=2\Leftrightarrow\alpha=1$

και αντικαθιστώντας στη σχέση (1) παίρνουμε: $\ln\beta=0\Rightarrow\beta=1$.

Β2. Για $\alpha=\beta=1$ η f γίνεται: $f(x)=\begin{cases}x^3-x^2 & , \quad x\le 1\\ x\ln x & , \quad x>1\end{cases}$

Αν $x<1$ τότε $f'(x)=3x^2-2x$.

Αν $x>1$ τότε $f'(x)=\ln x+1$.

Αν $x=1$ τότε $f'(1)=3\alpha-2=1$.

Άρα $f'(x)=\begin{cases}3x^2-2x & , \quad x<1\\ 1 & , \quad x=1\\ \ln x+1 & , \quad x>1\end{cases}$

Αν $x<1$ και $f'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2-2x=0\Leftrightarrow x(3x-2)=0\Leftrightarrow x=0\quad ή\quad x=\dfrac{2}{3}$.

Αν $x<1$ και $f'(x)>0\Leftrightarrow 3x^2-2x>0\Leftrightarrow x(3x-2)>0\Leftrightarrow x<0\quad ή\quad x>\dfrac{2}{3}$.

Αν $x>1$ τότε $f'(x)=\ln x+1>0$.

x	$-\infty$	0	$\frac{2}{3}$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−	0	+	+
$f(x)$	↗		↘		↗	↗

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$, γνησίως φθίνουσα στο $\left[0,\frac{2}{3}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{2}{3},+\infty\right)$, επομένως για $x=0$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο με μέγιστη τιμή $f(0)=0$, ενώ για $x=\frac{2}{3}$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο με ελάχιστη τιμή $f\left(\frac{2}{3}\right)=-\frac{4}{27}$.

Β3. Έστω $(x_A, f(x_A))$ οι συντεταγμένες του σημείου A. Η εφαπτομένη (ε_A) της C_f στο A έχει εξίσωση:

$$y-f(x_A)=f'(x_A)\cdot(x-x_A)\Rightarrow y-x_A\cdot\ln x_A=(\ln x_A+1)(x-x_A)$$

Βρίσκουμε την τετμημένη του σημείου τομής M της (ε_A) με τον άξονα $x'x$, θέτοντας στην παραπάνω εξίσωση $y=0$:

$$-x_A\cdot\ln x_A=(\ln x_A+1)(x-x_A)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cancel{-x_A\cdot\ln x_A}=(\ln x_A+1)\cdot x-\cancel{x_A\cdot\ln x_A}-x_A\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{x_A}{\ln x_A+1},\quad \text{άρα}\quad x_M(t)=\frac{x(t)}{\ln(x(t))+1}\quad \text{και}$$

$$x_M'(t)=\frac{x'(t)\cdot\left[\ln(x(t))+1\right]-\cancel{x(t)}\cdot\frac{1}{\cancel{x(t)}}\cdot x'(t)}{\left[\ln(x(t))+1\right]^2}\overset{t=t_0}{\Rightarrow}$$

$$\upsilon_M(t_0)=x_M'(t_0)=\frac{x'(t_0)\cdot\left[\ln(x(t_0))+1\right]-x'(t_0)}{\left[\ln(x(t_0))+1\right]^2}=$$

$$=\frac{4\cdot(\ln e+1)-4}{(\ln e+1)^2}=\frac{4}{2^2}=1 \text{ μονάδα/sec.}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για κάθε $x\in A$ ισχύει $\quad e^{f(x)}+f(x)=x \quad (1)$

Πρώτα θα δείξουμε ότι η f είναι 1-1.

1ος τρόπος

$$\left.\begin{aligned}&\text{Έστω } x_1, x_2\in A \text{ με } f(x_1)=f(x_2)\\ &\text{τότε } e^{f(x_1)}=e^{f(x_2)}\end{aligned}\right\}\overset{(+)}{\Rightarrow} e^{f(x_1)}+f(x_1)=e^{f(x_2)}+f(x_2)\overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow x_1=x_2\Rightarrow \text{η } f \text{ είναι 1-1.}$$

2ος τρόπος

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη, παραγωγίζω και τα δύο μέλη της σχέσης (1):

$$\left(e^{f(x)}+f(x)\right)'=x'\Leftrightarrow e^{f(x)}\cdot f'(x)+f'(x)=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x)\cdot\left(e^{f(x)}+1\right)=1\Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{e^{f(x)}+1}>0,\ \text{για κάθε } x\in A,$$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο A και επομένως 1-1.

Για να βρούμε τον τύπο της f^{-1} θέτουμε $f(x)=y$ με $y\geq 0$, αφού $f(A)=[0,+\infty)$ και αντικαθιστώντας στη σχέση (1) έχουμε:

$$e^y+y=x\Leftrightarrow e^y+y=f^{-1}(y) \text{ με } y\geq 0$$

Άρα $\quad f^{-1}(x)=e^x+x$, με $x\geq 0$.

Γ2. Ισχύει ότι $A=f^{-1}([0,+\infty))$ με

$$f^{-1}(x)=e^x+x\Rightarrow\left(f^{-1}\right)'(x)=e^x+1>0,$$

άρα η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Επομένως:

$$A=f^{-1}([0,+\infty))=\left[f^{-1}(0),\lim_{x\to+\infty}f^{-1}(x)\right)=[1,+\infty),$$

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x + x\right) = +\infty$.

Αναζητούμε το πεδίου ορισμού της $f\circ f$:

$$D_{f\circ f} = \left\{x\in D_f \,/\, f(x)\in D_f\right\} = \left\{x\in[1,+\infty)\,/\, f(x)\in[1,+\infty)\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 1 \\ \text{και} \\ f(x)\geq 1 \end{cases} \overset{f^{-1}\text{ γν.αύξουσα}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x\geq 1 \\ \text{και} \\ f^{-1}\left(f(x)\right)\geq f^{-1}(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 1 \\ \text{και} \\ x\geq e+1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow D_{f\circ f} = [e+1,+\infty).$$

Εξετάζουμε τη μονοτονία της $f\circ f$:

1ος τρόπος

Αφού $f'(x)>0$ η f είναι γνησίως αύξουσα στο $A=[1,+\infty)$.

Έστω $x_1, x_2 \in [e+1,+\infty)$ με

$$x_1 < x_2 \overset{f\text{-γν.αύξουσα}}{\Rightarrow} f(x_1) < f(x_2) \overset{f\text{-γν.αύξουσα}}{\Rightarrow} f\left(f(x_1)\right) < f\left(f(x_2)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (f\circ f)(x_1) < (f\circ f)(x_2),$$

δηλαδή η $f\circ f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[e+1,+\infty)$.

2ος τρόπος

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη και η $f\circ f$ είναι παραγωγίσιμη (ως σύνθεση παραγωγισίμων) με $(f\circ f)'(x) = \left[f\left(f(x)\right)\right]' = f'\left(f(x)\right)\cdot f'(x)$, με $f'(x)>0$ και $f'\left(f(x)\right)>0$ για κάθε $x\in[e+1,+\infty)$.

Άρα $(f\circ f)'(x)>0$ για κάθε $x\in[e+1,+\infty)$, επομένως η $f\circ f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[e+1,+\infty)$.

Γ3. Βρίσκουμε το σημείο τομής της C_f και του άξονα $x'x$:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x = f^{-1}(0) \Leftrightarrow x = e^0+0 \Leftrightarrow x=1,$$

άρα το σημείο τομής είναι το $(1,0)$.

Επειδή $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in A=[1,+\infty)$ το εμβαδόν που μας ζητείται είναι:

$$E(\Omega)=\int_1^{e+1} f(x)\mathrm{d}x$$

Θέτουμε $f(x)=u \Leftrightarrow x=f^{-1}(u) \Rightarrow x=e^u+u \Rightarrow \mathrm{d}x=(e^u+1)\mathrm{d}u$

και $u_1=f(1)=0$, $u_2=f(e+1)=1$, αφού $f^{-1}(1)=e^1+1=e+1$.

Τότε: $E(\Omega)=\int_1^{e+1} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 u\cdot(e^u+1)\mathrm{d}u=\int_0^1 u\cdot(e^u+u)'\mathrm{d}u=$

$$=\left[u\cdot(e^u+u)\right]_0^1-\int_0^1 u'\cdot(e^u+u)\mathrm{d}u=e+1-0-\left[e^u+\frac{u^2}{2}\right]_0^1=$$

$$=e+1-\left(e+\frac{1}{2}-1-0\right)=\cancel{e}+1-\cancel{e}-\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}\Rightarrow E(\Omega)=\frac{3}{2}\text{ τ.μ.}$$

Γ4. Αν $x>1$ τότε ισχύει $x<x^2<x^3$ και:

- η f είναι συνεχής στα διαστήματα $\left[x,\, x^2\right]$ και $\left[x^2,\, x^3\right]$
- η f είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $\left(x,\, x^2\right)$ και $\left(x^2,\, x^3\right)$

Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχουν $\xi_1\in\left(x,\, x^2\right)$ και $\xi_2\in\left(x^2,\, x^3\right)$ ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f(x^2)-f(x)}{x^2-x} \quad \text{και} \quad f'(\xi_2)=\frac{f(x^3)-f(x^2)}{x^3-x^2}$$

Όμως $f'(x)=\dfrac{1}{e^{f(x)}+1}$, άρα η f' είναι παραγωγίσιμη με

$$f''(x)=-\frac{1}{\left(e^{f(x)}+1\right)^2}\cdot e^{f(x)}\cdot f'(x)<0,\text{ αφού } e^{f(x)}>0 \text{ και } f'(x)>0.$$

Άρα $f''(x)<0$ επομένως η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$.

Ισχύει ότι:

$$x<\xi_1<x^2<\xi_2<x^3\Rightarrow \xi_1<\xi_2 \overset{f'\text{-γν.φθίνουσα}}{\Rightarrow} f'(\xi_1)>f'(\xi_2)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{f(x^2)-f(x)}{x^2-x}>\frac{f(x^3)-f(x^2)}{x^3-x^2} \overset{\cdot x\cdot(x^2-x)>0}{\Rightarrow} x\cdot\left(f(x^2)-f(x)\right)>f(x^3)-f(x^2)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+1)\cdot f(x^2)>f(x^3)+x\cdot f(x)$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Από την υπόθεση ισχύει $e^x - f(x) \le x \Leftrightarrow e^x - f(x) - x \le 0$, για κάθε $x > -1$.

Θεωρώ συνάρτηση g με $g(x) = e^x - f(x) - x$, $x > -1$.

Τότε $g(0) = 0$ και $g(x) \le g(0)$ για κάθε $x > -1$, δηλαδή η g παρουσιάζει στο $x = 0$ τοπικό μέγιστο. Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη με $g'(x) = e^x - f'(x) - 1$ και το $x = 0$ είναι εσωτερικό σημείο του διαστήματος $(-1, +\infty)$, από το θεώρημα του Fermat προκύπτει ότι: $g'(0) = 0 \Rightarrow e^0 - f'(0) - 1 = 0 \Rightarrow f'(0) = 0$.

Δ2. Από την υπόθεση ισχύει $(x+1)\cdot f''(x) = e^x(x+2) - f'(x) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f''(x)\cdot(x+1) + f'(x) = e^x\cdot(x+1) + e^x \Leftrightarrow$$

$$\left[f'(x)\cdot(x+1)\right]' = \left[e^x\cdot(x+1)\right]'$$

Από τις συνέπειες του Θεωρήματος Μέσης Τιμής έχουμε:

$$f'(x)\cdot(x+1) = e^x(x+1) + c_1 \quad (1)$$

Για $x = 0$ η σχέση (1) γίνεται:

$$\left.\begin{array}{r} f'(0)\cdot(0+1) = e^0(0+1) + c_1 \\ \text{και ακόμη } f'(0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow c_1 = -1$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (1) παίρνουμε:

$$f'(x)\cdot(x+1) = e^x(x+1) - 1 \overset{x+1>0}{\Rightarrow} f'(x) = e^x - \frac{1}{x+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \left(e^x - \ln(x+1)\right)'$$

Από τις συνέπειες του Θεωρήματος Μέσης Τιμής προκύπτει:

$$\Leftrightarrow f(x) = e^x - \ln(x+1) + c_2 \quad (2)$$

Για $x = 0$ η σχέση (2) γίνεται:

$$\left.\begin{array}{r} f(0) = e^0 - \ln(0+1) + c_2 \\ \text{και από την υπόθεση } f(0) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 1 = 1 + c_2 \Leftrightarrow c_2 = 0$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (2) βρίσκουμε:

$$f(x) = e^x - \ln(x+1) \text{ με } x > -1.$$

Δ3. **α.** Εξετάζουμε την f ως προς τη μονοτονία:

$$f'(x)=e^x-\frac{1}{x+1} \quad \text{με} \quad f'(0)=0$$

$$f''(x)=e^x+\frac{1}{(x+1)^2}>0 \text{ για κάθε } x>-1$$

άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1,+\infty)$.

Αν $-1<x<0 \overset{f'\text{-γν.αύξουσα}}{\Rightarrow} f'(x)<f'(0)=0 \Rightarrow f'(x)<0$ στο $(-1,0)$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1,0]$.

Αν $x>0 \overset{f'\text{-γν.αύξουσα}}{\Rightarrow} f'(x)>f'(0)=0 \Rightarrow f'(x)>0$ στο $(0,+\infty)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $(-1,0]$ έχουμε ότι:

$$f((-1,0])=\left[f(0),\lim_{x\to-1^+}f(x)\right)=[1,+\infty)$$

αφού $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\left(e^x-\ln(x+1)\right)=\frac{1}{e}-(-\infty)=+\infty$.

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[0,+\infty)$ έχουμε ότι:

$$f([0,+\infty))=\left[f(0),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=[1,+\infty)$$

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x-\ln(x+1)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^x\cdot\left(1-\frac{\ln(x+1)}{e^x}\right)\right]=$

$$=(+\infty)\cdot(1-0)=+\infty$$

και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{e^x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x+1}}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x\cdot(x+1)}=0$.

Άρα $f\left((-1,+\infty)\right)=[1,+\infty)$.

Επειδή $2\in(-1,+\infty)=f\left((-1,0)\right)$ και η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $(-1,0)$ υπάρχει μοναδικό $\xi_1\in(-1,0)$ ώστε $f(\xi_1)=2$.

Ακόμη $2\in(1,+\infty)=f\left((0,+\infty)\right)$ και η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ υπάρχει μοναδικό $\xi_2\in(0,+\infty)$ ώστε $f(\xi_2)=2$.

Άρα η εξίσωση $f(x)=2$ έχει ακριβώς δύο ρίζες, τις $\xi_1\in(-1,0)$ και $\xi_2\in(0,+\infty)$.

β. 1ος τρόπος

Αν E το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ της C_f και της ευθείας $y=2$ τότε

$E=\int_{\xi_1}^{\xi_2}\left|2-f(x)\right|\mathrm{d}x$

Αν $\xi_1\le x\le 0 \overset{f\text{-γν.φθίνουσα}}{\Rightarrow} f(x)\le f(\xi_1)\Rightarrow f(x)\le 2$ για κάθε $x\in[\xi_1,0]$.

Αν $0\le x\le \xi_2 \overset{f\text{-γν.αύξουσα}}{\Rightarrow} f(x)\le f(\xi_2)\Rightarrow f(x)\le 2$ για κάθε $x\in[0,\xi_2]$.

Άρα $f(x)\le 2$ για κάθε $x\in[\xi_1,\xi_2]$ οπότε

$$E=\int_{\xi_1}^{\xi_2}\left|2-f(x)\right|\mathrm{d}x=\int_{\xi_1}^{\xi_2}\left(2-f(x)\right)\mathrm{d}x$$

Όμως ισχύει ότι $f(x)\ge 1$ για κάθε $x\in[\xi_1,\xi_2]$ επομένως

$$-f(x)\le -1\Rightarrow 2-f(x)\le 1 \text{ για κάθε } x\in[\xi_1,\xi_2]$$

χωρίς να ισχύει παντού η ισότητα.

Άρα: $\int_{\xi_1}^{\xi_2}\left(2-f(x)\right)\mathrm{d}x<\int_{\xi_1}^{\xi_2}1\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow E<\xi_2-\xi_2$

2ος τρόπος

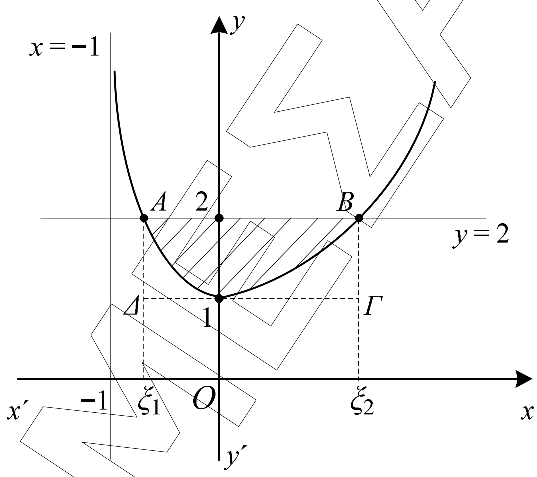
Το εμβαδόν E είναι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου του διπλανού σχήματος.

Παρατηρούμε ότι:

$E < (AB\Gamma\Delta) \Rightarrow E < (AB)\cdot(B\Gamma) \Rightarrow$

$\Rightarrow E < \xi_2 - \xi_1$, αφού

$(AB) = \xi_2 - \xi_1$ και $(B\Gamma) = 1$.



Δ4 Θέτουμε $u = \dfrac{1}{\sqrt{f(x)}} \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{1}{u^2}$.

Αν $x \to -1^+ \Rightarrow f(x) \to +\infty \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{f(x)}} \to 0^+ \Rightarrow u \to 0^+$.

Άρα $\lim\limits_{x\to -1^+}\left[\eta\mu\left(\dfrac{1}{\sqrt{f(x)}}\right)\cdot \ln f(x)\right] = \lim\limits_{u\to 0^+}\left[\eta\mu u \cdot \ln\left(\dfrac{1}{u^2}\right)\right] =$

$\lim\limits_{u\to 0^+}\left[\eta\mu u\cdot(-2)\cdot \ln u\right] = \lim\limits_{u\to 0^+}\left[-2\cdot\dfrac{\eta\mu u}{u}\cdot u\cdot \ln u\right] = (-2)\cdot 1\cdot 0 = 0$

αφού $\lim\limits_{u\to 0^+}\dfrac{\eta\mu u}{u} = 1$ και

$$\lim_{u\to 0^+}(u\cdot \ln u) = \lim_{u\to 0^+}\left(\frac{\ln u}{\frac{1}{u}}\right) \overset{\text{DLH}}{=} \lim_{u\to 0^+}\left(\frac{\frac{1}{u}}{-\frac{1}{u^2}}\right) = \lim_{u\to 0^+}(-u) = 0.$$