# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

## ΕΠΑ.Λ.

Σάββατο 21 Απριλίου 2018 | Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

# ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

## ΘΕΜΑ Α

**Α1.** Έστω η συνάρτηση $F(x) = cf(x)$. Έχουμε:

$F(x+h) - F(x) = cf(x+h) - cf(x) = c(f(x+h) - f(x))$, και για $h \neq 0$

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{cf(x+h)-cf(x)}{h} = c\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Επομένως,

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} c\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = cf'(x).$$

Άρα $(cf(x))' = cf'(x)$.

**Α2.** Μια συνάρτηση $f$ με πεδίο ορισμού το Α λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 \in$ Α, όταν $f(x) \leq f(x_1)$ για κάθε $x$ σε μια περιοχή του $x_1$.

**Α3.** **α)** Λάθος

**β)** Λάθος

**γ)** Σωστό

**δ)** Λάθος

**ε)** Σωστό

## ΘΕΜΑ Β

**Β1.** $\nu = 50$ (από υπόθεση), $\nu_1 = N_2 - \nu_2 = 6$, $N_1 = \nu_1 = 6$, $f_1\%= (6/50)100=12$,

$f_2\%=(12/50)100=24$,

$\nu_4 =0,4 \cdot 50=20$,

$\nu_3 =50 - (\nu_1 + \nu_2 +\nu_4 +\nu_5) = 10$,

$f_3\%=(10/50)100=20$,

$f_5\%=(2/50)100=4$,

$N_3 = N_2 + \nu_3 = 28$,

$N_4 = N_3 + \nu_4 = 48$,

$N_5 = \nu = 50$.

| $x_i$ | $\nu_i$ | $f_i\%$ | $N_i$ | $x_i \cdot \nu_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 6 | 12 | 6 | 0 |
| 1 | 12 | 24 | 18 | 12 |
| 2 | 10 | 20 | 28 | 20 |
| 3 | 20 | 40 | 48 | 60 |
| 4 | 2 | 4 | 50 | 8 |
| Σύνολο | $\nu = 50$ | 100 | – | 100 |

**Β2.** $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{5} x_i \cdot \nu_i}{\nu} = \dfrac{100}{50} = 2.$

Αφού $\nu = 50$ (άρτιος) η διάμεσος είναι το ημιάθροισμα των 2 μεσαίων παρατηρήσεων. Άρα $\delta = \dfrac{25\eta + 26\eta\pi\alpha\rho\alpha\tau\eta\rho\eta\sigma\eta}{2} = \dfrac{2+2}{2} = \dfrac{4}{2} = 2.$

**Β3.** $s^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{5}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 \cdot \nu_i = \frac{64}{50} = 1{,}28.$

$s = \sqrt{1{,}28} = 1{,}13.$

**Β4.** $\mathrm{CV} = \frac{s}{\bar{x}}100\% = \frac{1{,}13}{2}100\% = 56{,}5\% > 10\%,$ άρα το δείγμα είναι ανομοιογενές.

**Β5.** $f_3\% + f_4\% + f_5\% = 20 + 40 + 4 = 64$, δηλαδή 64%.

## ΘΕΜΑ Γ

**Γ1.** $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{x+3}{x+1} = \frac{1+3}{1+1} = \frac{4}{2} = 2.$

**Γ2.** $f'(x) = 3x^2 + 4x + \kappa.$

$f'(-1) = 3\times(-1)^2 + 4(-1) + \kappa = 3 - 4 + \kappa = -1 + \kappa$. Γνωρίζουμε ότι $f'(-1)=0$.

Άρα $-1 + \kappa = 0$. Οπότε $\kappa = 1$.

**Γ3.** Έχουμε: $f'(x) = 3x^2 + 4x + 1$.

Επίσης, $y = f(1) = 1 + 2 + 1 + 2018 = 2022$ και $\lambda = f'(1) = 3 + 4 + 1 = 8$.

Εξίσωση εφαπτομένης: $y = \lambda x + \beta$.

Αντικαθιστώντας προκύπτει: $2022 = 8 + \beta$.

Άρα $\beta = 2022 - 8 = 2014$.

Τελικά, η ζητούμενη εξίσωση εφαπτομένης είναι: $y = 8x + 2014$.

**Γ4.** Α= $4f'(2) - 8f''(-1) + f(0)$

Έχουμε: $f'(x) = 3x^2 + 4x + 1$ και $f''(x) = 6x + 4$

Υπολογίζουμε:

$f'(2) = 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 1 = 3 \cdot 4 + 8 + 1 = 12 + 8 + 1 = 21.$

$f''(-1) = 6 \cdot (-1) + 4 = -6 + 4 = -2.$

$f(0) = 0^3 + 2 \cdot 0^2 + 1 \cdot 0 + 2018 = 2018 = 0^3 + 2 \cdot 0^2 + 1 \cdot 0 + 2018 = 2018.$

Άρα $A = 4 \cdot 21 - 8 \cdot (-2) + 2018 = 84 + 16 + 2018 = 2118.$

## ΘΕΜΑ Δ

$$\mathrm{N}(t) = t^3 - \frac{3}{2}t^2 - 6t + 30,\ 0 \le t \le 10$$

**Δ1.** $\mathrm{N}'(t) = 3t^2 - 3t - 6$

**Δ2.** $\mathrm{N}'(t) = 0 \Rightarrow 3t^2 - 3t - 6 = 0$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-6) = 9 + 72 = 81$

$$t_{1,2} = \frac{3 \pm 9}{6}$$

$t_1 = 12 : 6 = 2$

$t_2 = -6 : 6 = -1$, απορρίπτεται, γιατί $0 \le t \le 10$.

| | $-\infty$ | 0 | | 2 | | 10 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| N′(t) | | | − | 0 | + | | |
| N(t) | | | ↘ | ΟΕ | ↗ | | |

Τη χρονική στιγμή $t = 2$ ο αριθμός των τουριστών γίνεται ελάχιστος με τιμή

$\mathrm{N}(2) = 2^3 - \frac{3}{2} \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + 30 = 8 - 6 - 12 + 30 = 20.$

**Δ3.** Αφού η Ν παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $t = 2$, ισχύει $\mathrm{N}(t) \geq \mathrm{N}(2)$, δηλαδή $\mathrm{N}(t) \geq 20$.

**Δ4.** $\mathrm{N}''(t) = 6t - 3$

$\mathrm{N}''(t) = 0 \Rightarrow 6t - 3 = 0$

$t = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

| | $-\infty$ | $0$ | | $\frac{1}{2}$ | | $10$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{N}''(t)$ | | | $-$ | $0$ | $+$ | | |
| $\mathrm{N}'(t)$ | | | ↘ | | ↗ | | |

Ο ρυθμός μεταβολής του αριθμού των τουριστών γίνεται ελάχιστος, τη χρονική στιγμή $t = \frac{1}{2}$.