2018 | Φάση 2 | Διαγωνίσματα Επανάληψης

ΑΛΓΕΒΡΑ

Β' Γενικού Λυκείου

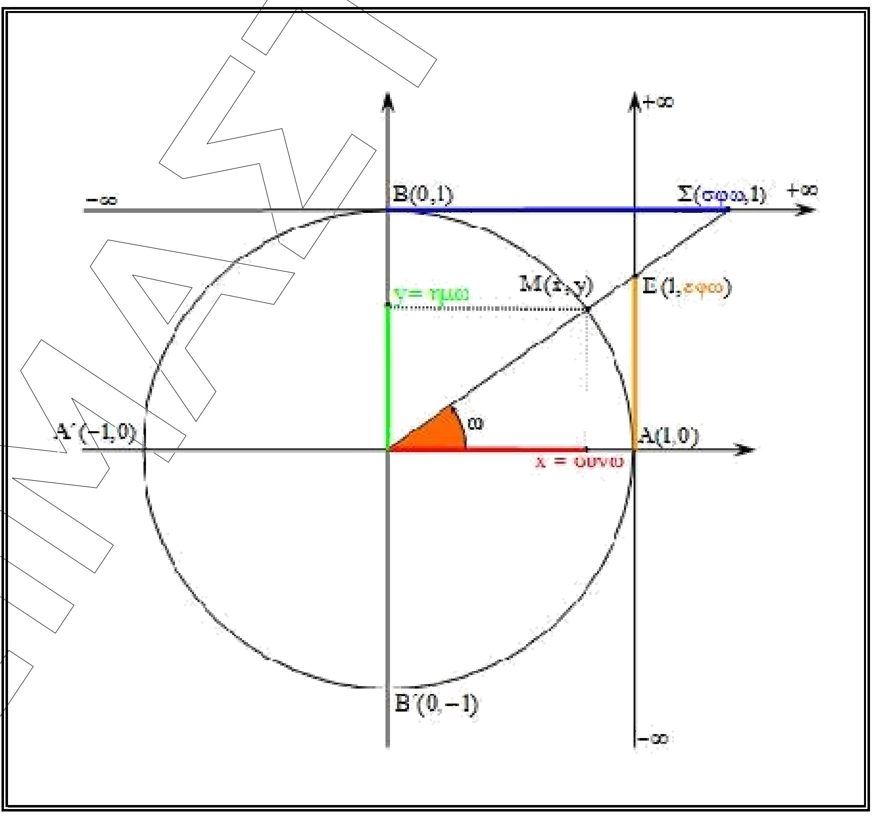
Γενικής Παιδείας

Σάββατο 21 Απριλίου 2018 | Διάρκεια Εξέτασης:3 ώρες

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Στο επόμενο σχήμα βλέπετε τον τριγωνομετρικό κύκλο, τους άξονες ημιτόνων, συνημιτόνων, εφαπτομένων, συνεφαπτομένων και τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω.



Να αποδείξετε ότι $\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1$.

(6 μονάδες)

Α2. Αν $\etaμx+\sigmaυνx=\sqrt{2}$, τότε:

1. Να δείξετε ότι:

a. $\etaμx\cdot\sigmaυνx=\frac{1}{2}$.

(3 μονάδες)

b. $\etaμ^3x+\sigmaυν^3x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(4 μονάδες)

2. Αν, <u>επιπλέον</u>, ισχύει $\etaμx=\sigmaυνx$, τότε:

a. Να βρείτε όλους τους τριγωνομετρικούς αριθμούς του τόξου x ($\etaμx, \sigmaυνx, εφx, σφx$).

(3 μονάδες)

b. Αν γνωρίζετε ότι $x\in(-\pi,\pi)$, να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρει το τόξο x.

(5 μονάδες)

c. Βρείτε (αν υπάρχουν), τις τιμές που μπορεί να πάρει το τόξο x, αν, <u>επιπλέον</u>, ισχύει $\sigmaυν\left(\frac{2019\pi}{2}+x\right)=-\sigmaυν(2019\pi+x)$ και $x\in(-\pi,0)$.

(4 μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

Β1. Δίνεται το πολυώνυμο $q(x)=x^3+x-2$. Να αποδείξετε τα επόμενα:

1. Η διαίρεση $q(x):(x-1)$ είναι τέλεια.
2. Το υπόλοιπο της διαίρεσης $q(x):(x-1)$ είναι μηδέν.
3. Το $(x-1)$ είναι παράγοντας του $q(x)$.
4. Το 1 είναι ρίζα του $q(x)$.
5. Ισχύει $q(1)=0$.
6. Το $(x-1)$ διαιρεί το $q(x)$.

(3 μονάδες)

Β2. Δίνεται πολυώνυμο $p(x)$, βαθμού $\nu \geq 2$ και $k \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε τις επόμενες προτάσεις:

1. Η διαίρεση $p(x):(x-k)$ είναι τέλεια.
2. Το υπόλοιπο της διαίρεσης $p(x):(x-k)$ είναι μηδέν.
3. Το $(x-k)$ είναι παράγοντας του $p(x)$.
4. Το k είναι ρίζα του $p(x)$.
5. Ισχύει $p(k)=0$.
6. Το $(x-k)$ διαιρεί το $p(x)$.

Ποιες από τις 6 προηγούμενες προτάσεις είναι ισοδύναμες μεταξύ τους (που σημαίνει ότι λένε το ίδιο πράγμα) και ποια – ή ποιες – λένε κάτι διαφορετικό;

(3 μονάδες)

B3. Θεωρούμε πολυώνυμο $p(x)$ για το οποίο ισχύει $2\cdot p(x)=2\cdot(\alpha^4-1)\cdot x^4+(\alpha^3+1)\cdot x^3+2\cdot(\alpha^2-1)\cdot x^2-6\alpha x+2b$, όπου $\alpha,b\in\mathbb{R}$.

1. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς *a*, *b*, αν γνωρίζετε ότι το $p(x)$ είναι τρίτου βαθμού και ότι το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το *x*–1 είναι ίσο με –4.

(4 μονάδες)

2. Αν $(\alpha,b)=(1,-2)$, τότε:

a. Να γράψετε αναλυτικά τη διαίρεση $p(x):(x-1)$, να δείξετε ότι έχει πηλίκο x^2+x-2, υπόλοιπο –4 και, μετά, να γράψετε την ταυτότητά της. (Υπενθύμιση: Η ταυτότητα κάθε ευκλείδειας διαίρεσης περιγράφεται λεκτικά από την πρόταση: «Διαιρετέος = διαιρέτης επί πηλίκο συν υπόλοιπο»).

(2 μονάδες)

b. Παρατηρήστε προσεκτικά την προηγούμενη ταυτότητα της διαίρεσης και, αξιοποιώντας κατάλληλα την παρατήρησή σας, να λύσετε την εξίσωση $p(x)+4=x^2-1$.

(4 μονάδες)

c. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\dfrac{p(x)}{(x-1)^2\cdot(x+2)}$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

(2 μονάδες)

ii. Να αξιολογήσετε ως «σωστό» ή «λάθος» κάθε έναν από τους επόμενους ισχυρισμούς:

(3 μονάδες)

1. Στις ασκήσεις που ζητούν επίλυση ανισότητας, δεν μπορούμε να κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών (όπως κάνουμε στην επίλυση εξισώσεων), εκτός αν γνωρίζουμε το πρόσημο του ΕΚΠ με το οποίο πολλαπλασιάζουμε.
2. Αν $f(x), g(x)$ δύο πολυώνυμα με $g(x) \neq 0$, ισχύει η ισοδυναμία: $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot g(x) \leq 0$.
3. Αν $f(x), g(x)$ δύο πολυώνυμα, η ανισότητα $f(x) \cdot g(x) \leq 0$ δεν επιλύεται παίρνοντας ανισότητες για κάθε πολυώνυμο χωριστά, αλλά με πίνακα προσήμων, στον οποίο, σε διαδοχικές γραμμές, φαίνονται ο άξονας των πραγματικών με τις ρίζες των πολυωνύμων, τα πρόσημα κάθε πολυωνύμου και τα πρόσημα του γινομένου τους.

iii. Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων (δηλαδή τις τιμές του x), για τα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f **<u>δεν</u>** βρίσκεται **<u>κάτω</u>** από την ευθεία με εξίσωση $y = 1$.

(4 μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

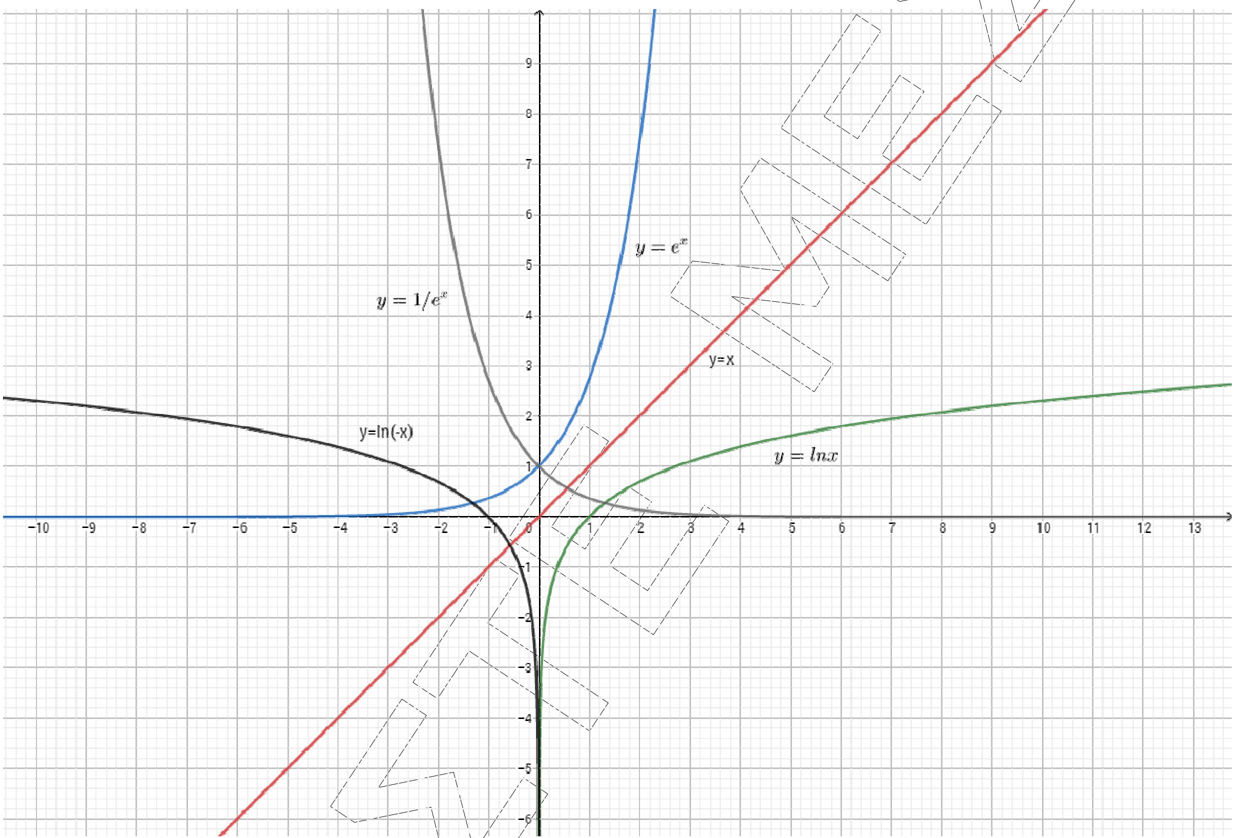
Γ1. Γνωρίζετε ότι: «Φυσικός λογάριθμος του θετικού αριθμού θ, είναι ο εκθέτης στον οποίο πρέπει να υψώσουμε τον αριθμό e, για να βρούμε τον αριθμό θ».

Συμβολικά: $\ln\theta = x \Leftrightarrow e^x = \theta$.

Με δεδομένη αυτήν τη γνώση, να γράψετε, λεκτικά και συμβολικά, τον ορισμό του δεκαδικού λογάριθμου ενός θετικού αριθμού α.

(3 μονάδες)

Γ2. Στο επόμενο σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\ln x$, $g(x)=e^{x}$, $p(x)=\ln(-x)$, $q(x)=e^{-x}$ και $h(x)=x$.



Με βάση τους τύπους των συναρτήσεων, τις γνώσεις σας από τη θεωρία, αλλά και τις πληροφορίες που παίρνετε από το σχήμα, να απαντήσετε αν κάθε ένας από τους επόμενους ισχυρισμούς είναι σωστός ή λανθασμένος:

(10 μονάδες)

1. Η *f* έχει πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$ και σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

2. Η *g* έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και σύνολο τιμών το $(0,+\infty)$.

3. Ισχύει $f(x)=-p(x)$.

4. Η *h* είναι άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων των *f*, *g*.

5. Οι C_g, C_q είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα *x'x*.

6. Η εξίσωση $\ln(-x)=e^x$ είναι αδύνατη.

7. Για οποιαδήποτε $x_1, x_2<0$, ισχύει $x_1<x_2 \Leftrightarrow q(x_1)<q(x_2)$.

8. Η συνάρτηση p έχει πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$.

9. Αν το σημείο (α, β) ανήκει στη C_f, τότε το σημείο (β, α) ανήκει στη C_g.

10. Ο άξονας $y'y$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη των C_f, C_p.

Γ3. Αξιοποιώντας τις ιδιότητες των λογαρίθμων (τις οποίες γνωρίζετε από τη θεωρία που έχετε μελετήσει), αντιστοιχίστε κάθε στοιχείο της πρώτης στήλης του επόμενου πίνακα με το ίσο του στη δεύτερη στήλη.

(4 μονάδες)

	Στήλη Α	**Στήλη Β**
1	$\log 30$	$2\cdot\log 7$
2	$10^{\log 2018}$	$\log 6+\log 5$
3	$\log 49$	$\log\frac{48}{6}$
4	$\log 8$	2018

Γ4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x-e)$.

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

(3 μονάδες)

2. Αφού δείξετε ότι $100^{\log\sqrt{5}}=5$, να λύσετε την εξίσωση $4\cdot\sqrt{e^2}\cdot e^{2f(x)}-9\cdot\sqrt[3]{e^3}\cdot e^{f(x)}+\left(100^{\log\sqrt{5}}-3\right)\cdot\sqrt[4]{e^4}=0$.

(5 μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε το πολυώνυμο $p(x)=(\ln\alpha-1)\cdot x^3+(9-\ln^2\alpha)\cdot x^2+(\sqrt{\alpha})^{\ln b}\cdot x+1$, όπου α, b θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Γνωρίζουμε ότι το $p(x)$ έχει θετικούς ακέραιους συντελεστές και αρνητική ακέραια ρίζα.

Δ1. Να δείξετε ότι $(\alpha,b)=(e^2,5)$.

(7 μονάδες)

Δ2. Αν $g(x)=e^{x-2018}, x\in R$, να λύσετε την ανίσωση $p(g(x))>g(x)+11$ και να δείξετε ότι ο μικρότερος ακέραιος αριθμός που συμπεριλαμβάνεται στις λύσεις της ανίσωσης, δηλώνει τη χρονιά που (εφόσον όλοι δουλέψουμε όπως πρέπει), θα πανηγυρίσουμε την εισαγωγή σας στην τριτοβάθμια εκπαίδευση.

(5 μονάδες)

Δ3. Αν $h(x)=\sigma\upsilon\nu^3 x$, $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, να βρείτε, εάν υπάρχουν, τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\phi(x)=p(h(x))$ με τον άξονα $x'x$.

(7 μονάδες)

Δ4. Αν f είναι μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $[0,+\infty)$ και τύπο $f(x)=p(x)$, να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να δείξετε ότι ισχύει $f(x)>0$, για κάθε $x\in[0,+\infty)$.

(6 μονάδες)