2018 | Φάση 2 | Διαγωνίσματα Επανάληψης

ΑΛΓΕΒΡΑ

Β' Γενικού Λυκείου

Γενικής Παιδείας

Σάββατο 21 Απριλίου 2018 | Διάρκεια Εξέτασης:3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία. (Σχολικό βιβλίο).

Α2.

1.

a.

$$\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = \sqrt{2} \Rightarrow (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2 = (\sqrt{2})^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x + 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x = 2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1 + 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x = 2 \Rightarrow 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x = 1 \Rightarrow \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2}$$

b.

$$\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = \sqrt{2} \Rightarrow (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^3 = (\sqrt{2})^3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \eta\mu^3 x + 3\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu x + 3\eta\mu x\sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\upsilon\nu^3 x = 2\sqrt{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \eta\mu^3 x + 3\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x \cdot (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) + \sigma\upsilon\nu^3 x = 2\sqrt{2} \overset{(\upsilon\pi o\theta\varepsilon\sigma\eta,\ \alpha\ \varepsilon\rho\omega\tau\eta\mu\alpha)}{\Longrightarrow}$$
$$\Rightarrow \eta\mu^3 x + \sigma\upsilon\nu^3 x + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow \eta\mu^3 x + \sigma\upsilon\nu^3 x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

2.

a. Από υπόθεση έχουμε: $\left.\begin{matrix} \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = \sqrt{2} \\ \eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x \end{matrix}\right\} \Rightarrow \eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, οπότε $\varepsilon\varphi x = \sigma\varphi x = 1$.

b. Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4} \\ x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{4} \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Από υπόθεση έχουμε ότι $x \in (-\pi, \pi)$, άρα:

$$-\pi < 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4} < \pi \Leftrightarrow -\frac{5\pi}{4} < 2\kappa\pi < \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow -\frac{5}{8} < \kappa < \frac{3}{8} \overset{\kappa\in\mathbb{Z}}{\Longrightarrow} \kappa = 0, \text{ άρα } x = \frac{\pi}{4}.$$

Επίσης, $-\pi < 2\kappa\pi - \frac{\pi}{4} < \pi \Leftrightarrow -\frac{3\pi}{4} < 2\kappa\pi < \frac{5\pi}{4} \Leftrightarrow -\frac{3}{8} < \kappa < \frac{5}{8} \overset{\kappa\in\mathbb{Z}}{\Longrightarrow} \kappa = 0$, άρα $x = -\frac{\pi}{4}$, το οποίο όμως πρέπει να απορριφθεί, αφού

$\eta\mu\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \neq -\frac{\sqrt{2}}{2} = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, άρα δεν ικανοποιεί τη δεύτερη υπόθεσή μας (ότι πρέπει $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x$).

Άρα, τελικά, $x = \frac{\pi}{4}$ (μοναδική λύση).

c. Η δοσμένη εξίσωση γράφεται:

$$\sigma\upsilon\nu\left(2019\cdot\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sigma\upsilon\nu(2019\pi + x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left((4\cdot 540 + 3)\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sigma\upsilon\nu(2018\pi + \pi + x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(540\cdot 2\pi + \frac{3\pi}{2} + x\right) = -\sigma\upsilon\nu(1009\cdot 2\pi + \pi + x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\sigma\upsilon\nu(\pi + x) \Leftrightarrow \eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x$$

Άρα η εξίσωσή μας είναι αυτή που λύσαμε πριν, αλλά μας ζητείται να τη λύσουμε στο διάστημα $(-\pi, 0)$. Όμως, πριν δείξαμε ότι, με βάση τα δεδομένα της άσκησης, δεν υπάρχει λύση της εξίσωσης σε αυτό το διάστημα. Άρα, η εξίσωση είναι αδύνατη.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Κάνοντας τη διαίρεση $(x^3+x-2):(x-1)$ (ή και με χρήση του σχήματος Horner), βρίσκουμε πηλίκο x^2+x+2 και υπόλοιπο μηδέν. Γράφοντας την ταυτότητα της διαίρεσης, έχουμε: $q(x)=(x^3+x-2)=(x^2+x+2)\cdot(x-1)$ από όπου προκύπτουν όλα τα ζητούμενα.

Β2. Χρησιμοποιώντας τις γνώσεις μας από τη θεωρία (αλλά και το ερέθισμα που μας δίνει το προηγούμενο ερώτημα), διαπιστώνουμε ότι οι 6 προτάσεις είναι απολύτως ισοδύναμες (που σημαίνει ότι λένε ακριβώς το ίδιο πράγμα).

Β3.

1. Είναι

$$2\cdot p(x)=2\cdot(\alpha^4-1)\cdot x^4+(\alpha^3+1)\cdot x^3+2\cdot(\alpha^2-1)\cdot x^2-6\alpha x+2b \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow p(x)=(\alpha^4-1)\cdot x^4+\left(\frac{\alpha^3+1}{2}\right)\cdot x^3+(\alpha^2-1)\cdot x^2-3\alpha x+b$$

Από υπόθεση έχουμε ότι το $p(x)$ είναι 3ου βαθμού. Άρα, έχουμε:

$$\left.\begin{matrix}\alpha^4-1=0\\ \text{και}\\ \alpha^3+1\neq 0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{matrix}\alpha=\pm 1\\ \text{και}\\ \alpha\neq -1\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow \alpha=1.$$

Για α = 1, έχουμε $p(x)=x^3-3x+b$.

Επίσης από υπόθεση, γνωρίζουμε ότι $p(1)=-4 \Rightarrow ... \Rightarrow b=-2$.

2. Αν $(\alpha,b)=(1,-2)$, τότε:

a. Κάνουμε τη διαίρεση, βρίσκουμε το πηλίκο και το υπόλοιπο που ζητούνται και γράφουμε την ταυτότητά της: $p(x)=(x-1)\cdot(x^2+x-2)-4$.

b. Αξιοποιώντας την ταυτότητα του προηγούμενου ερωτήματος, η προς επίλυση εξίσωση ισοδύναμα γράφεται:

$$p(x)+4=x^2-1 \Rightarrow (x-1)\cdot(x^2+x-2)=x^2-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\cdot(x^2+x-2)-(x-1)\cdot(x+1)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\cdot(x^2-3)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \Leftrightarrow x=1 \\ \text{ή} \\ x^2-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{3} \\ \text{ή} \\ x=-\sqrt{3} \end{cases} \end{cases}$$

c.

i. Πρέπει $(x-1)^2\cdot(x+2)\neq 0$, δηλαδή $x\neq 1$ και $x\neq -2$. Άρα $x\in(-\infty,-2)\cup(-2,1)\cup(1,+\infty)$.

ii.

1. Σωστό.

2. Σωστό.

3. Σωστό.

iii. Λύνουμε την ανίσωση $f(x)\geq 1$, η οποία γράφεται $\dfrac{p(x)}{(x-1)^2\cdot(x+2)}\geq 1$,

άρα

$$\frac{p(x)}{(x-1)^2\cdot(x+2)}\geq 1 \Leftrightarrow \frac{(x-1)\cdot(x^2+x-2)-4}{(x-1)^2\cdot(x+2)}\geq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2\cdot(x+2)-4}{(x-1)^2\cdot(x+2)}\geq 1 \Leftrightarrow 1-\frac{4}{(x-1)^2\cdot(x+2)}\geq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{4}{(x-1)^2\cdot(x+2)}\geq 0 \Leftrightarrow -4\cdot(x-1)^2\cdot(x+2)\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2\cdot(x+2)\leq 0 \overset{x\neq 1,\, x\neq -2}{\Longleftrightarrow} x<-2$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Δεκαδικός λογάριθμος του θετικού αριθμού θ, είναι ο εκθέτης στον οποίο πρέπει να υψώσουμε τον αριθμό 10, για να βρούμε τον αριθμό θ».

Συμβολικά: $\log\theta = x \Leftrightarrow 10^x=\theta$.

Γ2.

1. Σωστό.
2. Σωστό.
3. Λάθος.
4. Σωστό.
5. Λάθος.
6. Λάθος.
7. Λάθος.
8. Λάθος.
9. Σωστό.
10. Σωστό.

Γ3. $A1 \leftrightarrow B2$

$A2 \leftrightarrow B4$

$A3 \leftrightarrow B1$

$A4 \leftrightarrow B3$

Γ4.

1. Πρέπει $x-e>0 \Leftrightarrow x>e$. Άρα $A_f=(e,+\infty)$.

2. Είναι: $100^{\log\sqrt{5}}=\left(10^2\right)^{\log\sqrt{5}}=10^{2\cdot\log\sqrt{5}}=10^{\log\left(\sqrt{5}\right)^2}=10^{\log 5}=5$.

Παρατηρούμε ότι $e^{f(x)}=e^{\ln(x-e)}=x-e$, οπότε η προς επίλυση εξίσωση γράφεται:

$$4\cdot\sqrt{e^2}\cdot e^{2f(x)}-9\cdot\sqrt[3]{e^3}\cdot e^{f(x)}+\left(100^{\log\sqrt{5}}-3\right)\cdot\sqrt[4]{e^4}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\cdot e\cdot\left(e^{f(x)}\right)^2-9\cdot e\cdot e^{f(x)}+2e=0\Leftrightarrow 4\cdot\left(e^{f(x)}\right)^2-9\cdot e^{f(x)}+2=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\cdot(x-e)^2-9\cdot(x-e)+2=0\overset{x-e=w}{\Longrightarrow}4\cdot w^2-9\cdot w+2=0$$

$$\text{Είναι: }\begin{cases} w=2\Rightarrow x-e=2\Leftrightarrow x=e+2 \\ \text{ή} \\ w=\dfrac{1}{4}\Rightarrow x-e=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow x=e+\dfrac{1}{4}\end{cases}$$

Και οι δύο λύσεις μας είναι δεκτές, αφού και οι δύο ανήκουν στο πεδίο ορισμού της *f*.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Από υπόθεση, πρέπει να ισχύει:

$$\begin{cases} \ln\alpha - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln\alpha > 1 \\ \text{και} \\ 9-\ln^2\alpha > 0 \Leftrightarrow \ln^2\alpha < 9 \Leftrightarrow \sqrt{\ln^2\alpha} < \sqrt{9} \Leftrightarrow |\ln\alpha| < 3 \Leftrightarrow -3 < \ln\alpha < 3 \end{cases}$$

Ο μοναδικός ακέραιος (γιατί, για να είναι ακέραιος ο συντελεστής, πρέπει να είναι ακέραιος ο αριθμός $\ln\alpha$), που ικανοποιεί αυτές τις απαιτήσεις είναι το 2. Άρα έχουμε $\ln\alpha = 2 \Leftrightarrow \alpha = e^2$. Επίσης από υπόθεση, το -1 είναι ακέραια ρίζα του πολυωνύμου, άρα $p(-1)=0 \Rightarrow (-1)^3 + 5\cdot(-1)^2 + b\cdot(-1)+1=0 \Leftrightarrow b=5$.

Δ2. Με τα a, b που βρήκαμε πριν, είναι: $p(x)=x^3+5\cdot x^2+5\cdot x+1$. Άρα, η ανίσωση που πρέπει να λύσουμε γράφεται:

$$p\left(e^{x-2018}\right) > e^{x-2018}+11 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(e^{x-2018}\right)^3 + 5\cdot\left(e^{x-2018}\right)^2 + 5\cdot\left(e^{x-2018}\right)+1 > e^{x-2018}+11 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(e^{x-2018}\right)^3 + 5\cdot\left(e^{x-2018}\right)^2 + 4\cdot\left(e^{x-2018}\right)-10 > 0$$

Θέτουμε $e^{x-2018} = k > 0$ οπότε η ανίσωση γράφεται

$k^3+5k^2+4k-10>0 \overset{\text{Horner...}}{\Longleftrightarrow} (k-1)\cdot\left(\underbrace{k^2+6k+10}_{>0}\right) > 0 \Leftrightarrow k>1$, επομένως έχουμε

$e^{x-2018} > 1 \Leftrightarrow x-2018>0 \Leftrightarrow x > 2018$.

Άρα, ο μικρότερος ακέραιος αριθμός που συμπεριλαμβάνεται στις λύσεις της ανίσωσης, είναι το 2019...

Δ3. Αναζητούμε τις λύσεις της εξίσωσης

$$\varphi(x)=0 \Rightarrow p(h(x))=0 \Rightarrow (h(x))^3+5\cdot(h(x))^2+5\cdot h(x)+1=0$$
$$\Rightarrow \left(\text{συν}^3 x\right)^3+5\cdot\left(\text{συν}^3 x\right)^2+5\cdot\left(\text{συν}^3 x\right)+1=0$$

στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Θέτουμε $\sigma\upsilon\nu^3 x = w$ και η εξίσωση γράφεται:

$$w^3+5\cdot w^2+5\cdot w+1=0 \overset{\text{Horner...}}{\Longleftrightarrow} (w+1)\cdot(w^2+4w+1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} w=-1 \\ w=-2+\sqrt{3} \\ w=-2-\sqrt{3} \end{cases}$$

Επομένως, έχουμε $\begin{array}{l} \sigma\upsilon\nu^3 x=-1<0 \\ \sigma\upsilon\nu^3 x=-2+\sqrt{3}<0 \\ \sigma\upsilon\nu^3 x=-2-\sqrt{3}<0 \end{array}$

που απορρίπτονται (και οι τρεις), γιατί από υπόθεση $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, οπότε $\sigma\upsilon\nu x\geq 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^3 x\geq 0$. Άρα, τελικά, η εξίσωση είναι αδύνατη, οπότε δεν υπάρχουν κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $\phi(x)=p(h(x))$ με τον άξονα x'x.

Δ4. Από υπόθεση έχουμε $f(x)=x^3+5\cdot x^2+5\cdot x+1$ με $x\geq 0$. Για $x\geq 0$ είναι:

$$0\leq x_1<x_2 \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x_1^{\ 3}<x_2^{\ 3} \\ x_1^{\ 2}<x_2^{\ 2}\Rightarrow 5x_1^{\ 2}<5x_2^{\ 2} \\ 5x_1+1<5x_2+1 \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Longrightarrow} x_1^{\ 3}+5x_1^{\ 2}+5x_1+1<x_2^{\ 3}+5x_2^{\ 2}+5x_2+1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Τώρα έχουμε: $x\geq 0 \overset{f\uparrow}{\Longrightarrow} f(x)\geq f(0) \Rightarrow f(x)\geq 1$.

Άρα, η f παρουσιάζει ελάχιστη τιμή το 1, για x = 0, επομένως ισχύουν όλα τα ζητούμενα.