ΑΛΓΕΒΡΑ

Α' Γενικού Λυκείου

Σάββατο 21 Απριλίου 2018 | Διάρκεια Εξέτασης:3 ώρες

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Α

Πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης $f(x)$ από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B ονομάζουμε το σύνολο A, στο οποίο φαίνονται οι τιμές που επιτρέπεται να πάρει η μεταβλητή x.

Α1. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

i. $f(x)=x^2-3$

ii. $g(x)=\dfrac{5}{3x-6}$

iii. $h(x)=\sqrt{4x-8}$

iv. $p(x)=\dfrac{\sqrt{7x+21}}{x-1}$

Μονάδες 12

Α2. **α)** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας, η οποία έχει κλίση $\alpha=-1$ και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0, 6)$.

Μονάδες 3

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση A όταν ισχύει $x<6$:

$$A=\frac{\sqrt{36-12x+x^2}}{x-6}$$

Μονάδες 6

γ) Ποια η σχετική θέση της ευθείας που βρήκατε στο (α) ερώτημα και κάθε ευθείας που έχει ως συντελεστή διεύθυνσης (δηλαδή κλίση) τον αριθμό που προέκυψε από την απλοποίηση της παράστασης A;

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Β

Β1. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με **(Σ)**, αν είναι σωστές ή **(Λ)**, αν είναι λανθασμένες:

i. Ισχύει ότι $\alpha^3 - \beta^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$.

ii. Η ισοδυναμία $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu > \beta^\nu$ ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό α και β και ακέραιο ν.

iii. Ισχύει ότι $|x| = |\alpha| \Leftrightarrow x = \alpha$ ή $x = -\alpha$.

iv. Ισχύει ότι $|\alpha|^2 = \alpha^2$

v. Ισχύει ότι $\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ ή $\beta = 0$.

Μονάδες 10

Β2. **α)** Να αποδείξετε ότι η παράσταση A είναι ανεξάρτητη του x, αν ισχύει $1 < x < 3$ (δηλαδή να «διώξετε» τα απόλυτα και στο αποτέλεσμα να μην υπάρχει το x).

$$A = 3|x-1| + |x-4| - 2|x|$$

Μονάδες 5

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης B.

$$B = \sqrt[3]{\left(\sqrt{7}-2\right)^3} \cdot \sqrt[7]{\left(\sqrt{7}+2\right)^7}$$

Μονάδες 4

γ) Αν ισχύει $A < x < B$ και $2 < y < 5$ (όπου A και B οι απαντήσεις σας από τα προηγούμενα ερωτήματα), να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών βρίσκονται οι ακόλουθες παραστάσεις:

i) $x + y$ **ii)** $x - y$ **iii)** $2x^2 + y^2$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. **α)** Γεωμετρική πρόοδος λέγεται η ακολουθία, στην οποία κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πολλαπλασιασμό επί τον ίδιο πάντοτε μη μηδενικό αριθμό.

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό να γράψετε τι ονομάζουμε αριθμητική πρόοδο.

Μονάδες 2

β) Έστω (α_ν) μια αριθμητική πρόοδος με διαφορά ω και (β_ν) μια γεωμετρική πρόοδος με θετικούς όρους και λόγο λ. Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης **Α** με ένα στοιχείο της στήλης **Β** κι ένα στοιχείο της στήλης **Γ**.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β	ΣΤΗΛΗ Γ
1. $\beta_1 \cdot \dfrac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$	**a.** α_ν	**i.** Άθροισμα πρώτων ν όρων γεωμετρικής προόδου.
2. $\dfrac{\nu}{2} \cdot (\alpha_1 + \alpha_\nu)$	**b.** β^2	**ii.** $\nu^{ος}$ όρος γεωμετρικής προόδου με λόγο λ.
3. $\alpha_1 + (\nu - 1) \cdot \omega$	**c.** ω	**iii.** $\nu^{ος} + 1$ όρος γεωμετρικής προόδου με λόγο λ.
4. $\dfrac{\beta_{\nu+1}}{\beta_\nu}$	**d.** S_ν	**iv.** Ορισμός γεωμετρικής προόδου.
5. $\dfrac{\alpha + \gamma}{2}$	**e.** β_ν	**v.** Άθροισμα πρώτων ν όρων αριθμητικής προόδου.
6. $\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu$	**f.** β	**vi.** Αριθμητικός μέσος των α και γ.
7. $\alpha \cdot \gamma$	**g.** $\beta_{\nu+1}$	**vii.** Ορισμός αριθμητικής προόδου.
8. $\beta_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$	**h.** S_ν	**viii.** Γεωμετρικός μέσος των α και γ.
9. $\beta_1 \cdot \lambda^\nu$	**i.** λ	**ix.** $\nu^{ος}$ όρος αριθμητικής προόδου με διαφορά ω.

Μονάδες 9

Γ2. Σε μια γεωμετρική πρόοδο (α_ν) ο δεύτερος και τέταρτος όρος έχουν άθροισμα 60, ενώ ισχύει $\alpha_3 + \alpha_5 = 180$. Να βρείτε:

α) Τον πρώτο όρο α_1 και το λόγο λ της (α_ν).

Μονάδες 3

β) Το άθροισμα των πρώτων 5 όρων της (α_ν).

Μονάδες 2

Γ3. Δίνεται ακολουθία (β_ν) της οποίας ο ν-οστος όρος είναι ο $\beta_\nu = 2\nu - 3$.

α) Να δείξετε ότι η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος και να βρείτε τον πρώτο όρο β_1 και τη διαφορά ω της προόδου.

Μονάδες 4

β) Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \beta_1 \cdot x + \omega$, όπου β_1 και ω ο πρώτος όρος κι η διαφορά της παραπάνω ακολουθίας αντίστοιχα. Να λυθεί η εξίσωση:

$$\left|x^2 - \beta_1 \cdot x - \omega\right| = -x^2 + \beta_1 \cdot x + \omega$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. **α)** Αντιστοιχίστε κάθε στοιχείο της στήλης **Α** με ένα στοιχείο της στήλης **Β** σχετικά με τη διακρίνουσα της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \alpha \neq 0$:

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
1. $\Delta > 0$	**i.** 2 ίσες ρίζες.
2. $\Delta < 0$	**ii.** πραγματικές ρίζες.
3. $\Delta \geq 0$	**iii.** 2 πραγματικές και άνισες ρίζες.
4. $\Delta = 0$	**iv.** Αδύνατη στους πραγματικούς αριθμούς.

Μονάδες 2

β) Συμπληρώστε τα κενά με τις λέξεις που δίνονται:

(μηδέν, εκτός των ριζών, ομόσημο, ετερόσημο, μεταξύ των ριζών)
Το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma, \alpha \neq 0$ γίνεται:

- ________________ του α, μόνο όταν είναι $\Delta > 0$ και για τις τιμές του x, που βρίσκονται ________________
- ________________, όταν η τιμή του x είναι κάποια από τις ρίζες του τριωνύμου.
- ________________ του α σε κάθε άλλη περίπτωση.

Μονάδες 2

Δ2. Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 - 4x - \lambda = 0, \lambda \neq 0$ (1).

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει πραγματικές και άνισες ρίζες.

Μονάδες 4

β) Να βρείτε το λ, ώστε το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης (1) να είναι ίσο με το γινόμενό τους.

Μονάδες 5

γ) Έστω $\lambda = -4$. Να λύσετε τις ανισώσεις που δίνονται παρακάτω και να βρείτε τις κοινές τους λύσεις:

$$|\lambda x - 1| \leq 7 \qquad \kappa\alpha\iota \qquad \lambda x^2 + x + 3 \leq 0$$

Μονάδες 6

δ) Να κατασκευάσετε τριώνυμο της μορφής $x^2 + \beta x + \gamma$, το οποίο να έχει ως ρίζες τις δύο αρνητικές κοινές ακέραιες λύσεις των παραπάνω ανισώσεων.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Εναλλακτικό θέμα αντί για τις προόδους.

Γ1. **α)** Να λύσετε την εξίσωση: $x^3 - 4x = 0$

Μονάδες 6

β) Αν ω είναι η μεγαλύτερη ρίζα (λύση) της παραπάνω εξίσωσης , να αποδείξετε ότι **Α = Β**, όταν:

$$A = \frac{1}{\sqrt{\omega} - 1} - \frac{1}{\sqrt{\omega} + 1}$$

και

$$B = \sqrt{\sqrt[5]{\omega^9}} \cdot \sqrt[10]{\omega}$$

Μονάδες 12

Γ2. Να λυθεί η εξίσωση: $\left|x^2 + x - 2\right| = -x^2 - x + 2$

Μονάδες 7