ΤΑΞΗ: **Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**
ΜΑΘΗΜΑ: **ΑΛΓΕΒΡΑ /ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**

Ημερομηνία: Τετάρτη 19 Απριλίου 2017
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη (Σχολικό βιβλίο, σελίδα 175)

Α2. **α)** Λάθος. [πχ. Αν $P(x)=-3x^3+4x^2-2$ ($3^{ου}$ βαθμού) και $Q(x)=3x^3+7x+5$ ($3^{ου}$ βαθμού), τότε είναι $P(x)+Q(x)=4x^2+7x+3$ ($2^{ου}$ βαθμού)].

β) Λάθος. [πχ. Για τη συνάρτηση $f(x)=x^2$ είναι $f(1)=1<4=f(2)$ αλλά δεν είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ αφού για $-2<-1$ είναι $f(-2)=4>1=f(-1)$].

γ) Σωστό. (Σχολικό βιβλίο, σελίδα 44)

δ) Λάθος. (Ο $\log x$ δεν ορίζεται για αρνητικές τιμές του x).

ε) Λάθος. [Είναι $e^{-x}=\dfrac{1}{e^x}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$].

ΘΕΜΑ Β

Β1. Είναι: • $\sigma\upsilon\nu(\pi+\theta)=-\sigma\upsilon\nu\theta$

$$\bullet\ \sigma\upsilon\nu\left(\frac{19\pi}{2}-\theta\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{20\pi}{2}-\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sigma\upsilon\nu\left(10\pi-\frac{\pi}{2}-\theta\right)=$$

$$=\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sigma\upsilon\nu\left[-\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right]=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=$$

$$=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-(-\theta)\right)=\eta\mu(-\theta)=-\eta\mu\theta$$

• $\sigma\varphi(\pi-\theta)=-\sigma\varphi\theta$

• $\sigma\varphi\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\varepsilon\varphi\theta$

• $\sigma\upsilon\nu(\pi-\theta)=-\sigma\upsilon\nu\theta$

• $\eta\mu(\pi+\theta)=-\eta\mu\theta$

- $\varepsilon\varphi\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\sigma\varphi\theta$
- $\varepsilon\varphi(2\pi+\theta)=\varepsilon\varphi\theta$

Επομένως, η παράσταση Α γίνεται:

$$\mathrm{A}=\frac{-\sigma\upsilon\nu(\pi+\theta)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{19\pi}{2}-\theta\right)\cdot\sigma\varphi(\pi-\theta)\cdot\sigma\varphi\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)}{\sigma\upsilon\nu(\pi-\theta)\cdot\eta\mu(\pi+\theta)\cdot\varepsilon\varphi\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)\cdot\varepsilon\varphi(2\pi+\theta)}=$$

$$=\frac{-(-\sigma\upsilon\nu\theta)\cdot(-\eta\mu\theta)\cdot(-\sigma\varphi\theta)\cdot\varepsilon\varphi\theta}{(-\sigma\upsilon\nu\theta)\cdot(-\eta\mu\theta)\cdot\sigma\varphi\theta\cdot\varepsilon\varphi\theta}=1$$

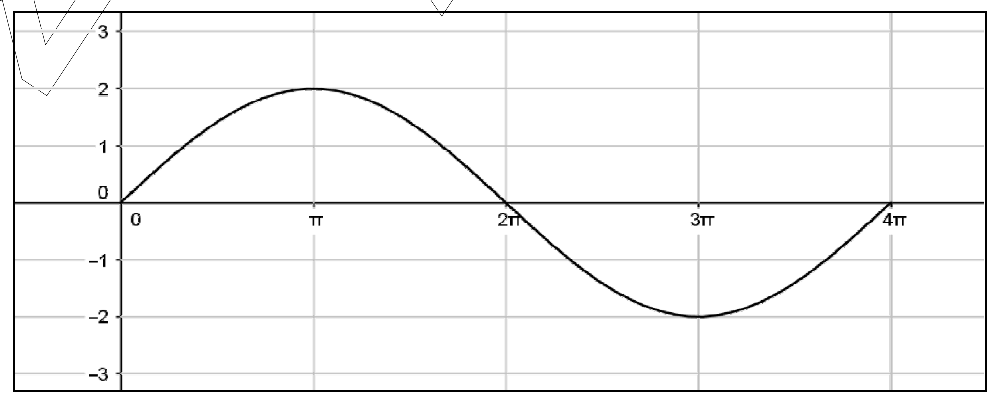
Β2. Για τη συνάρτηση $f(x)=2\cdot\eta\mu\left(\dfrac{x}{2}\right)$ έχουμε:

- $\max f=|2|=2$
- $\min f=-|2|=-2$
- περίοδος $\mathrm{T}=\dfrac{2\pi}{\omega}=\dfrac{2\pi}{\dfrac{1}{2}}=4\pi$

Ο πίνακας τιμών για το διάστημα μιας περιόδου $[0, 4\pi]$ είναι:

x	0	π	2π	3π	4π
$\dfrac{x}{2}$	0	$\dfrac{\pi}{2}$	π	$\dfrac{3\pi}{2}$	2π
$\eta\mu\dfrac{x}{2}$	0	1	0	-1	0
$2\cdot\eta\mu\dfrac{x}{2}$	0	2	0	-2	0

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο $[0, 4\pi]$ είναι:



Β3. $f(x)=\mathrm{A} \Leftrightarrow 2\cdot \eta\mu\frac{x}{2}=1 \Leftrightarrow \eta\mu\frac{x}{2}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\frac{x}{2}=\eta\mu\frac{\pi}{6}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2}=2k\pi+\frac{\pi}{6}, \quad k\in\mathbb{Z} \\ \acute{\eta} \\ \frac{x}{2}=2k\pi+\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right), \quad k\in\mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4k\pi+\frac{\pi}{3}, \quad k\in\mathbb{Z} \\ \acute{\eta} \\ x=4k\pi+\frac{5\pi}{3}, \quad k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

Β4. Επειδή οι αριθμοί $\frac{5\pi}{4}$ και $\frac{11\pi}{6}$ ανήκουν στο διάστημα $[\pi, 3\pi]$ όπου η f είναι γνησίως φθίνουσα, ισχύει:

$$\frac{5\pi}{4}<\frac{11\pi}{6} \Rightarrow f\left(\frac{5\pi}{4}\right)>f\left(\frac{11\pi}{6}\right)$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αφού το πολυώνυμο $P(x)$ είναι 3^{ου} βαθμού θα πρέπει:

$\lambda^2-1=0 \Leftrightarrow \lambda^2=1 \Leftrightarrow \lambda=1$ ή $\lambda=-1$

- Για $\lambda=1$ έχουμε $P(x)=x^2-7x+6$, οπότε το $P(x)$ είναι 2^{ου} βαθμού και άρα η τιμή $\lambda=1$ απορρίπτεται.
- Για $\lambda=-1$ έχουμε $P(x)=2x^3-x^2-7x+6$, οπότε το $P(x)$ είναι 3^{ου} βαθμού και άρα η τιμή $\lambda=-1$ είναι δεκτή.

Για $\lambda=-1$

Γ2. Είναι $P(x)=2x^3-x^2-7x+6$.

Θέλουμε να βρούμε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ με τον άξονα $x'x$, οπότε αρκεί να λύσουμε την εξίσωση: $P(x)=0 \Leftrightarrow 2x^3-x^2-7x+6=0$

Πιθανές ακέραιες ρίζες του $P(x)$ οι $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$

Εφαρμόζοντας σχήμα Horner για $x=1$ έχουμε:

2	–1	–7	6	$x=1$
↓	2	1	–6	
2	1	–6	0	

Επομένως:

$$2x^3 - x^2 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(2x^2 + x - 6) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x - 1 = 0 \text{ ή } 2x^2 + x - 6 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = \frac{3}{2} \text{ ή } x = -2$$

οπότε, τα σημεία τομής είναι τα $\mathrm{A}(1,0)$, $\mathrm{B}\left(\frac{3}{2},0\right)$, $\Gamma(-2,0)$

Γ3. **α)** Αφού το πολυώνυμο $Q(x)$ έχει παράγοντα το $x-2$ θα ισχύει ότι:

$$Q(2) = 0 \Leftrightarrow 8 - 4(\mu+1) + 2(\mu-1) + 2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$8 - 4\mu - 4 + 2\mu - 2 + 2 = 0 \Leftrightarrow -2\mu + 4 = 0 \Leftrightarrow 2\mu = 4 \Leftrightarrow \mu = 2$$

Για $\mu = 2$ έχουμε $Q(x) = x^3 - 3x^2 + x + 2$, ενώ η διαίρεση του $Q(x)$ δια του $x+3$ γίνεται ως εξής:

$$\begin{array}{r|l}
x^3 - 3x^2 + x + 2 & x+3 \\ \cline{2-2}
-x^3 - 3x^2 & x^2 - 6x + 19 \\ \cline{1-1}
-6x^2 + x + 2 & \\
6x^2 + 18x & \\ \cline{1-1}
19x + 2 & \\
-19x - 57 & \\ \cline{1-1}
-55 &
\end{array}$$

Η ταυτότητα της διαίρεσης είναι: $Q(x) = (x+3)(x^2 - 6x + 19) - 55$

β. $\dfrac{x^2 - 6x + 19}{Q(x) + 55} + \dfrac{2x^2 + x - 6}{P(x)} < 0 \;\; (1)$

Από **Γ3.α)** έχουμε $Q(x) = (x+3)(x^2 - 6x + 19) - 55$,

επομένως $Q(x) + 55 = (x+3)(x^2 - 6x + 19)$

Από **Γ2.** έχουμε $P(x) = (x-1)(2x^2 + x - 6)$

Πρέπει: $(x+3)(x^2-6x+19) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3$, αφού $x^2-6x+19 \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (Δ<0)

Επίσης πρέπει $(x-1)(2x^2+x-6) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1, -2, \frac{3}{2}$

Για $x \neq -3, -2,\ 1,\ \frac{3}{2}$ η ανίσωση (1) ισοδύναμα γίνεται:

$$\frac{x^2-6x+19}{(x+3)(x^2-6x+19)}+\frac{2x^2+x-6}{(x-1)(2x^2+x-6)}<0 \Leftrightarrow \frac{1}{x+3}+\frac{1}{x-1}<0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x-1}{(x+3)(x-1)}+\frac{x+3}{(x+3)(x-1)}<0 \Leftrightarrow \frac{x-1+x+3}{(x+3)(x-1)}<0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2x+2}{(x+3)(x-1)}<0 \Leftrightarrow \frac{2(x+1)}{(x+3)(x-1)}<0 \Leftrightarrow 2(x+1)(x+3)(x-1)<0$$

x	$-\infty$		-3		-2		-1		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$2(x+1)$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
Γινόμενο		$-$	‖	$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	‖	$+$	

Άρα η ανίσωση αληθεύει όταν $x \in (-\infty,-3) \cup (-1,1)$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η συνάρτηση $f(x)=\left(1-\frac{1}{ln\alpha}\right)^x$ ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$ όταν:

$$\begin{cases} 1-\frac{1}{ln\alpha}>0 \\ ln\alpha \neq 0 \\ \alpha>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{ln\alpha-1}{ln\alpha}>0 \\ ln\alpha \neq ln1 \\ \alpha>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ln\alpha(ln\alpha-1)>0 \\ \alpha \neq 1 \\ \alpha>0 \end{cases}$$

α	$-\infty$ 0	1	e	$+\infty$
$ln\alpha$		$-$ 0	$+$	$+$
$ln\alpha-1$		$-$	$-$ 0	$+$
$ln\alpha(ln\alpha-1)$		$+$	$-$ 0	$+$

Από τον παραπάνω πίνακα προσήμου έχουμε ότι: $\alpha\in(0,1)\cup(e,+\infty)$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ όταν:

$$\begin{cases} 1-\dfrac{1}{ln\alpha}>1 \\ \alpha\in(0,1)\cup(e,+\infty)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{ln\alpha}>0 \\ \alpha\in(0,1)\cup(e,+\infty)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ln\alpha<0 \\ \alpha\in(0,1)\cup(e,+\infty)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha<1 \\ \alpha\in(0,1)\cup(e,+\infty)\end{cases} \Leftrightarrow \alpha\in(0,1)$$

Δ2. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$f(-x)\cdot f(x)=\left(1-\frac{1}{ln\alpha}\right)^{-x}\left(1-\frac{1}{ln\alpha}\right)^{x}=\left(1-\frac{1}{ln\alpha}\right)^{-x+x}=1$$

Άρα, $f(-x)=\dfrac{1}{f(x)}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Από την παραπάνω σχέση για $x=\dfrac{1}{2}$ έχουμε: $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{f\left(\dfrac{1}{2}\right)}$

Άρα,

$$f(e^x)\cdot f\left(-\frac{1}{2}\right)>1\Leftrightarrow f(e^x)\cdot\frac{1}{f\left(\frac{1}{2}\right)}>1\overset{f(x)>0}{\Leftrightarrow} f(e^x)>f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\overset{(f\nearrow)}{\Leftrightarrow} e^x>\frac{1}{2}\overset{(lnx\nearrow)}{\Leftrightarrow} ln e^x>ln\left(\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow x>ln\left(\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow x>-ln2$$

Δ3. **α)** Έχουμε:

$$\alpha = \frac{1}{2}\log_3 81 + \log_3 15 - \log_3 5 - e^{\frac{1}{2}ln9} + e^{-\frac{ln2}{ln4}}$$

$$= log_3 81^{\frac{1}{2}} + log_3\frac{15}{5} - e^{ln9^{\frac{1}{2}}} + e^{-\frac{ln2}{ln2^2}} = log_3\sqrt{81} + log_3 3 - \sqrt{9} + e^{-\frac{ln2}{2ln2}}$$

$$= \log_3 9 + 1 - 3 + e^{-\frac{1}{2}} = 2 - 2 + e^{-\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}}$$

Άρα,

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{ln\, e^{-\frac{1}{2}}}\right)^x = \left(1 - \frac{1}{-\frac{1}{2}}\right)^x = (1+2)^x = 3^x,\ \ x \in \mathbb{R}$$

β)

<u>α΄ τρόπος</u>

Έχουμε

$$ln2 + ln\big(f(2x)\big) < x\,ln2 + ln\big(2^x + f(x)\big)$$

$$\Leftrightarrow ln\big(2\cdot f(2x)\big) < ln2^x + ln\big(2^x + f(x)\big)$$

$$\Leftrightarrow ln\big(2\cdot 3^{2x}\big) < ln\big(2^x\cdot(2^x + 3^x)\big)$$

$$\Leftrightarrow 2\cdot 3^{2x} < 2^{2x} + 2^x\cdot 3^x$$

$$\overset{:2^{2x}}{\Leftrightarrow} 2\cdot\frac{3^{2x}}{2^{2x}} < 1 + \frac{2^x\cdot 3^x}{2^{2x}}$$

$$\Leftrightarrow 2\cdot\left(\left(\frac{3}{2}\right)^x\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^x - 1 < 0$$

Θέτουμε $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \omega > 0$ και η ανίσωση γίνεται:

$$2\omega^2 - \omega - 1 < 0 \overset{\omega>0}{\Leftrightarrow} 0 < \omega < 1 \Leftrightarrow 0 < \left(\frac{3}{2}\right)^x < 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x < \left(\frac{3}{2}\right)^0 \Leftrightarrow x < 0$$

<u>β’ τρόπος</u>

Έχουμε

$$ln2 + ln\big(f(2x)\big) < x\,ln2 + ln\big(2^x + f(x)\big)$$

$$\Leftrightarrow ln\big(2\cdot f(2x)\big) < ln2^x + ln\big(2^x + f(x)\big)$$

$$\Leftrightarrow ln\left(2\cdot 3^{2x}\right)<ln\left(2^x\cdot\left(2^x+3^x\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\cdot 3^{2x}<2^{2x}+2^x\cdot 3^x$$

$$\overset{:3^{2x}}{\Leftrightarrow} 2<\frac{2^{2x}}{3^{2x}}+\frac{2^x\cdot 3^x}{3^{2x}}\Leftrightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}+\left(\frac{2}{3}\right)^x-2>0$$

Θέτουμε $\left(\frac{2}{3}\right)^x=\omega>0$ και η ανίσωση γίνεται:

$$\omega^2+\omega-2>0\overset{\omega>0}{\Leftrightarrow}\omega>1\Leftrightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^x>1\Leftrightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^x>\left(\frac{2}{3}\right)^0\overset{\left(\frac{2}{3}\right)^x\searrow}{\Leftrightarrow}x<0$$

<u>γ' τρόπος</u>

Έχουμε

$$ln2+ln\left(f\left(2x\right)\right)<x\,ln2+ln\left(2^x+f\left(x\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow ln\left(2\cdot f\left(2x\right)\right)<ln2^x+ln\left(2^x+f\left(x\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow ln\left(2\cdot 3^{2x}\right)<ln\left(2^x\cdot\left(2^x+3^x\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\cdot 3^{2x}<2^{2x}+2^x\cdot 3^x$$

$$\overset{:(2^x\cdot 3^x)}{\Leftrightarrow} 2\cdot\frac{3^{2x}}{2^x\cdot 3^x}<\frac{2^{2x}}{2^x\cdot 3^x}+\frac{2^x\cdot 3^x}{2^x\cdot 3^x}$$

$$\Leftrightarrow 2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^x<\left(\frac{2}{3}\right)^x+1$$

$$\Leftrightarrow 2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^x<\left(\frac{3}{2}\right)^{-x}+1$$

$$\overset{\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\Leftrightarrow} 2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}<1+\left(\frac{3}{2}\right)^x$$

$$\Leftrightarrow 2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-\left(\frac{3}{2}\right)^x-1<0$$

Θέτουμε $\left(\frac{3}{2}\right)^x=\omega>0$ και η ανίσωση γίνεται:

$$2\omega^2-\omega-1<0\overset{\omega>0}{\Leftrightarrow}0<\omega<1\Leftrightarrow 0<\left(\frac{3}{2}\right)^x<1\Leftrightarrow\left(\frac{3}{2}\right)^x<\left(\frac{3}{2}\right)^0\overset{\left(\frac{3}{2}\right)^x\nearrow}{\Leftrightarrow}x<0$$

<u>δ' τρόπος</u>

Έχουμε $ln2+ln\left(f\left(2x\right)\right)<x\,ln2+ln\left(2^x+f\left(x\right)\right)$

$$\Leftrightarrow ln\left(2\cdot f(x)\right) < ln2^x + ln\left(2^x + f(x)\right)$$
$$\Leftrightarrow ln\left(2\cdot 3^{2x}\right) < ln\left(2^x\cdot\left(2^x+3^x\right)\right)$$
$$\Leftrightarrow 2\cdot 3^{2x} < 2^{2x} + 2^x\cdot 3^x$$
$$\Leftrightarrow 2^{2x} + 2^x\cdot 3^x - 2\cdot 3^{2x} > 0$$
$$\Leftrightarrow 2^{2x} + 2^x\cdot 3^x - 3^{2x} - 3^{2x} > 0$$
$$\Leftrightarrow \left(2^{2x} - 3^{2x}\right) + \left(2^x\cdot 3^x - 3^{2x}\right) > 0$$
$$\Leftrightarrow \left(2^x - 3^x\right)\left(2^x + 3^x\right) + 3^x\left(2^x - 3^x\right) > 0$$
$$\Leftrightarrow \left(2^x - 3^x\right)\left(2^x + 2\cdot 3^x\right) > 0$$
$$\overset{2^x+2\cdot 3^x>0}{\Leftrightarrow} 2^x - 3^x > 0 \Leftrightarrow 2^x > 3^x$$
$$\overset{2^x>0}{\Leftrightarrow} \left(\frac{3}{2}\right)^x < 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x < \left(\frac{3}{2}\right)^0$$
$$\overset{\left(\frac{3}{2}\right)^x \nearrow}{\Leftrightarrow} x < 0$$

γ) Έχουμε: $\left(2+\sqrt{f(1)}\right)\left(2-\sqrt{f(1)}\right) = 2^2 - \sqrt{f(1)}^2 = 4 - f(1) = 4 - 3 = 1$

οπότε, $2-\sqrt{f(1)} = \dfrac{1}{2+\sqrt{f(1)}}$ και η εξίσωση γίνεται:

$$\left(2+\sqrt{f(1)}\right)^x + \left(2-\sqrt{f(1)}\right)^x = 4 \Leftrightarrow \left(2+\sqrt{f(1)}\right)^x + \frac{1}{\left(2+\sqrt{f(1)}\right)^x} = 4 \Leftrightarrow$$

$$\left(2+\sqrt{f(1)}\right)^{2x} + 1 = 4\left(2+\sqrt{f(1)}\right)^x \overset{(f(1)=3)}{\Leftrightarrow} \left(\left(2+\sqrt{3}\right)^x\right)^2 - 4\left(2+\sqrt{3}\right)^x + 1 = 0$$

Θέτουμε $\left(2+\sqrt{3}\right)^x = y > 0$ και η εξίσωση γίνεται:

$$y^2 - 4y + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(y = \frac{4+\sqrt{12}}{2} \ \ \acute{\eta}\ \ y = \frac{4-\sqrt{12}}{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow y = 2+\sqrt{3} \ \ \acute{\eta}\ \ y = 2-\sqrt{3} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = \left(2+\sqrt{3}\right)^{-1}$$
$$\Leftrightarrow \left(2+\sqrt{3}\right)^x = \left(2+\sqrt{3}\right)^1 \ \ \acute{\eta}\ \ \left(2+\sqrt{3}\right)^x = \left(2+\sqrt{3}\right)^{-1}$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{x} = 1 \ \ \acute{\eta}\ \ x = -1$$

ΤΕΛΟΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ