ΤΑΞΗ: 3η ΤΑΞΗ ΕΠΑ.Λ.
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι/ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Κυριακή 17 Απριλίου 2016
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1.

1. Ο φυσικός αριθμός που μας δείχνει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή μιας μεταβλητής ονομάζεται συχνότητα v_i.

2. Σχετική συχνότητα f_i ονομάζεται ο λόγος της συχνότητας v_i προς το μέγεθος ν του δείγματος: $f_i = \frac{v_i}{v}$.

3. Έστω η συνάρτηση $f(x)=c$. Έχουμε:

$f(x+h)-f(x)=c-c=0$

και για $h \neq 0$, $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{c-c}{h}=0$. Επομένως:

$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=0$. Άρα $(c)'=0$

Α2.

1. Λ
2. Σ
3. Λ
4. Λ

Α3.

1. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell$, τότε $\lim_{x\to x_0}(c\cdot f(x))=c\cdot \ell$
2. $\left(f(g(x))\right)'=f'(g(x))\cdot g'(x)$
3. $(\text{συνx})'=-\text{ημ}x$
4. Αν CV = 9%, τότε το δείγμα είναι *ομοιογενές*.

ΘΕΜΑ Β

Β1. $\bar{x}=7 \Leftrightarrow \dfrac{8+5+2\omega-2+5+9+2\omega+1+\omega+3+6+8+7}{10}=7 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5\omega+50=70 \Leftrightarrow 5\omega=20 \Leftrightarrow \omega=4$

Β2. Αντικαθιστώντας την τιμή του ω (ω = 4), οι αριθμοί μπαίνοντας σε αύξουσα σειρά θα είναι οι:

5, 5, 6, 6, 7, 7, 8, 8, 9, 9

Το πλήθος του δείγματος είναι 10, άρα υπάρχουν 2 μεσαίες παρατηρήσεις, η 5η και η 6η. Δηλαδή $\delta=\dfrac{7+7}{2}=\dfrac{14}{2}=7$.

Β3. $s^2=\dfrac{(5-7)^2\cdot 2+(6-7)^2\cdot 2+(7-7)^2\cdot 2+(8-7)^2\cdot 2+(9-7)^2\cdot 2}{10}=$

$=\dfrac{8+2+0+2+8}{10}=\dfrac{20}{10}=2$

Άρα η τυπική απόκλιση θα είναι ίση με: $s=\sqrt{s^2}=\sqrt{2}$

Β4. $\bar{x}'=\dfrac{5+5+6+6+7+7+8+8+9+9+4+10}{12}=\dfrac{84}{12}=7$

ΘΕΜΑ Γ

Α

Γ1. Επειδή η εφαπτομένη της καμπύλης της f είναι παράλληλη στην ευθεία ε, θα έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης. Δηλαδή: $\lambda=f'(1)=2$.

Είναι: $f'(x)=(x^3)'-(2\alpha x^2)'+(5x)'-(2)' \Leftrightarrow f'(x)=3x^2-4\alpha x+5$.

$f'(1)=2 \Leftrightarrow 3\cdot 1^2-4\alpha\cdot 1+5=2 \Leftrightarrow -4\alpha=2-8 \Leftrightarrow \alpha=\dfrac{-6}{-4}=\dfrac{3}{2}$.

Γ2. $f(1)=1^3-2\cdot\dfrac{3}{2}\cdot 1^2+5\cdot 1-2=1-3+3 \Leftrightarrow f(1)=1$

$y=\lambda x+\beta \Leftrightarrow f(1)=f'(1)\cdot 1+\beta \Leftrightarrow 1=2\cdot 1+\beta \Leftrightarrow \beta=-1$.

Άρα η εξίσωση της ζητούμενης εφαπτομένης είναι:

$$y=2x-1$$

Β

Γ3. Θα πρέπει $6-x\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 6$

Επίσης, θα πρέπει $4-x^2\neq 0 \Leftrightarrow x^2\neq 4 \Leftrightarrow x\neq \pm\sqrt{4} \Leftrightarrow x\neq \pm 2$.

Άρα $A_g=(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,6]$

Γ4.
$$\lim_{x\to 2} g(x)=\lim_{x\to 2}\frac{2-\sqrt{6-x}}{4-x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 2}\frac{\left(2-\sqrt{6-x}\right)\left(2+\sqrt{6-x}\right)}{(2-x)(2+x)\left(2+\sqrt{6-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{2^2-\left(\sqrt{6-x}\right)^2}{(2-x)(2+x)\left(2+\sqrt{6-x}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{4-6+x}{(2-x)(2+x)\left(2+\sqrt{6-x}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(2-x)(2+x)\left(2+\sqrt{6-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{-(2-x)}{(2-x)(2+x)\left(2+\sqrt{6-x}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{-1}{(2+x)\left(2+\sqrt{6-x}\right)}=-\frac{1}{4\cdot 4}=-\frac{1}{16}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Είναι: $S(t)=\dfrac{2t^3}{3}-7t^2+20t+2$

$$S(3)=\frac{2\cdot 3^3}{3}-7\cdot 3^2+20\cdot 3+2=18-63+60+2=17\ \text{m}.$$

Δ2. $S'(t)=\left(\dfrac{2t^3}{3}\right)'-\left(7t^2\right)'+\left(20t\right)'+\left(2\right)'=2t^2-14t+20\ \text{m/sec}.$

Δ3. Η ταχύτητα ενός σώματος είναι ο ρυθμός μεταβολής της θέσης του.

Άρα $u(t)=S'(t)$. Επομένως: $u(t)=0 \Leftrightarrow S'(t)=0 \Leftrightarrow 2t^2-14t+20=0$

Για αυτήν έχουμε: $\Delta=(-14)^2-4\cdot 2\cdot 20=196-160=36$ και

$$t_{1,2}=\frac{-(-14)\pm\sqrt{36}}{2\cdot 2}=\begin{cases}\dfrac{14+6}{4}=5\\[2ex]\dfrac{14-6}{4}=2\end{cases}.$$

Άρα η ταχύτητα μηδενίζεται όταν t = 2s ή t = 5s.

Δ4. Θα μελετήσουμε τη συνάρτηση της θέσης ως προς τη μονοτονία:

t	0		2		5		10
S'(t)		+	0	-	0	+	
S(t)		↗		↘		↗	

Στο (2,5) είναι S'(t)<0, άρα στο [2,5] η S(t) είναι γνησίως φθίνουσα.
Άρα η θέση του σώματος μειώνεται από 2 έως 5 sec.

Δ5. Θα μελετήσουμε τη συνάρτηση της ταχύτητας ως προς τα ακρότατα.

$u(t) = 2t^2 - 14t + 20$ m/sec.

$u'(t) = \left(2t^2\right)' - \left(14t\right)' + \left(20\right)' = 4t - 14$ m/sec^2.

$u'(t) = 0 \Leftrightarrow 4t - 14 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$ sec.

t	0		7/2		10
u'(t)		-	0	+	
u(t)		↘		↗	

Στο [0, 7/2) είναι u'(t)<0 και στο (7/2 , 10] είναι u'(t)>0. Άρα στο t = 7/2 sec η ταχύτητα γίνεται ελάχιστη, με τιμή:

$$u\left(\frac{7}{2}\right) = 2\left(\frac{7}{2}\right)^2 - 14\left(\frac{7}{2}\right) + 20 = 2\cdot\frac{49}{4} - 49 + 20 = -\frac{9}{2} \text{ m/sec.}$$