ΤΑΞΗ: Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΆΛΓΕΒΡΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Μ. Τετάρτη 27 Απριλίου 2016
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. **60**
Α2. **α)** Σ, **β)** Λ, **γ)** Σ, **δ)** Λ, **ε)** Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1.
$$\mathrm{A}(x)=\frac{2}{\sigma\varphi x+\varepsilon\varphi x}=\frac{2}{\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}+\dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}}=\frac{2}{\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2 x+\eta\mu^2 x}{\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}}=$$
$$=\frac{2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x+\eta\mu^2 x}=\frac{\eta\mu 2x}{1}=\eta\mu 2x.$$

Β2.
$$B(x)=\frac{(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)^2-\eta\mu 2x}{2}=\frac{\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x+\cancel{2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}-\cancel{2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}}{2}=\frac{1}{2}.$$

Β3.
$$A(x)=B(x)\Leftrightarrow \eta\mu 2x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \eta\mu 2x=\eta\mu\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}2x=\dfrac{\pi}{6}+2\kappa\pi\\ \text{ή}\\ 2x=\pi-\dfrac{\pi}{6}+2\kappa\pi\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}x=\dfrac{\pi}{12}+\kappa\pi\\ \text{ή}\\ x=\dfrac{5\pi}{12}+\kappa\pi\end{matrix}\right\}\kappa\in\mathbb{Z}$$

Β4. Η συνάρτηση $f(x)$ έχει τύπο: $f(x)=A(x)-B(x)=\eta\mu 2x-\frac{1}{2}$.

Ισχύει $-1\le \eta\mu 2x\le 1 \Leftrightarrow -1-\frac{1}{2}\le \eta\mu 2x-\frac{1}{2}\le 1-\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{3}{2}\le f(x)\le \frac{1}{2}$.

Άρα η ελάχιστη τιμή της είναι $-\frac{3}{2}$ και η μέγιστη τιμή της είναι $\frac{1}{2}$.

Η περίοδος είναι $\mathrm{T}=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αν x παράγοντας του P(x) τότε $P(0)=0$ οπότε μ=0.
Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με (x+1) είναι το 3 τότε:
$P(-1)=3 \Leftrightarrow -2-3+7+\lambda+6-7+0=3 \Leftrightarrow \lambda=2$.

Γ2. Για λ=2 και μ=0 έχουμε:
$P(x)=2x^5-3x^4-7x^3+8x^2+7x$.

Η διαίρεση γίνεται ως εξής:

$$\begin{array}{l|l}
2x^5-3x^4-7x^3+8x^2+7x & x^2-2 \\ \cline{2-2}
\underline{-2x^5\qquad +4x^3} & 2x^3-3x^2-3x+2 \\
\quad -3x^4-3x^3+8x^2+7x & \\
\quad \underline{+3x^4\qquad -6x^2} & \\
\quad -3x^3+2x^2+7x & \\
\quad \underline{+3x^3\qquad -6x} & \\
\qquad 2x^2+x & \\
\qquad \underline{2x^2+4} & \\
\qquad\quad x+4 &
\end{array}$$

Η ταυτότητα της διαίρεσης είναι:
$P(x)=(x^2-2)(2x^3-3x^2-3x+2)+x+4$.

Γ3. Πρέπει $P(x) > x+4 \Leftrightarrow (x^2-2)(2x^3-3x^2-3x+2)+x+4 > x+4 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x^2-2)(2x^3-3x^2-3x+2) > 0$ (Ι)
Πιθανές ακέραιες ρίζες του $Q(\chi) = 2x^3 - 3x^3 - 3x + 2$ είναι $\pm 1, \pm 2$.

Με σχήμα Horner έχω:

2	-3	-3	2	-1
↓	-2	5	-2	
2	-5	2	0	

Άρα $Q(x) = (x+1)(2x^2-5x+2)$.
Οπότε (Ι) $\Leftrightarrow (x^2-2)(2x^2-5x+2)(x+1) > 0$
Άρα Δ=25-16=9, $x = \begin{smallmatrix}\nearrow 2 \\ \searrow \frac{1}{2}\end{smallmatrix}$, $x^2-2=0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$.

Το πρόσημο των παραγόντων του γινόμενου αλλά και του γινομένου τους φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

X		$-\sqrt{2}$		**-1**		$\frac{1}{2}$		$\sqrt{2}$		**2**	
x^2-2	+	0	-		-		-	0	+		+
$2x^2-5x+$	+		+		+	0	-		-	0	+
$x+1$	-		-	0	+		+		+		+
Γινόμενο	-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+

Άρα $x \in (-\sqrt{2}, -1) \cup \left(\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right) \cup (2, +\infty)$.

Γ4. **Πρέπει P(x)=Q(x)**

$$\Leftrightarrow 2x^5-3x^4-7x^3+8x^2+7x=2x^5+(2a+\beta)x^4-7x^3+(-3\alpha+2\beta)x^2+(\kappa+6)x+\kappa-1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2\alpha+\beta=-3\\ -3\alpha+2\beta=8\\ \kappa+6=7\\ \kappa-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-2\\ \beta=1\\ \kappa=1\end{cases}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Ορίζεται αν $e^{x+1}-e\neq 0\Leftrightarrow e^{x+1}\neq e\Leftrightarrow x+1\neq 1\Leftrightarrow x\neq 0$
και

$$\frac{e^{2x}-(e+1)e^x+e}{e^{x+1}-e}>0\Leftrightarrow\frac{(e^x-1)(e^x-e)}{(e^x-1)\,e}>0\Leftrightarrow\frac{e^x-e}{e}>0\Leftrightarrow e^x-e>0\Leftrightarrow e^x>e\Leftrightarrow x>1$$

αφού για τον αριθμητή έχουμε:

$\Delta=(e+1)^2-4\cdot e=e^2+2e+1-4e=e^2-2e+1=(e-1)^2>0.$

και $e^x=\dfrac{(e+1)\pm(e-1)}{2}\begin{matrix}\nearrow e\\ \searrow 1\end{matrix}$ οπότε γράφεται $(e^x-e)(e^x-1)$.

Άρα πρέπει $x\neq 0$ και $x>1$ δηλαδή $A_f=(1,+\infty)$. Τότε απλοποιείται ως εξής:

$$f(x)=\ln\frac{(e^x-1)(e^x-e)}{(e^x-1)\,e}=\ln\frac{e^x-e}{e}.$$

Δ2. Η g(x) γράφεται: $g(x)=e^{2x-1}-4e^{x-1}+3=\dfrac{e^{2x}}{e}-\dfrac{4e^x}{e}+3=\dfrac{e^{2x}-4e^x+3e}{e}$.

Άρα $g(x)=e^{\ln\frac{5+3e}{e}}\Leftrightarrow\dfrac{e^{2x}-4e^x+3e}{e}=\dfrac{5+3e}{e}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{2x}-4e^x+3e=5+3e\Leftrightarrow e^{2x}-4e^x-5=0.$

Είναι $\Delta=(-4)^2-4\cdot(-5)\cdot 1=36$ και $e^x=\dfrac{4\pm 6}{2}\begin{matrix}\nearrow 5 \text{ δεκτή}\\ \searrow -1 \text{ απορ.}\end{matrix}$.

Άρα $e^x=5\Leftrightarrow x=\ln 5$ δεκτή.

Δ3. Αρκεί $f(x)\leq 0\Leftrightarrow\ln\dfrac{e^{2x}-(e+1)^{ex}+e}{e^{x+1}-e}\leq\ln 1\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\frac{e^{2x}-(e+1)e^x+e}{e^{x+1}-e}\leq 1\Leftrightarrow\frac{(e^x-1)(e^x-e)}{(e^x-1)\,e}\leq 1\Leftrightarrow\frac{e^x-e}{e}\leq 1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x-e\leq e\Leftrightarrow e^x\leq 2e\Leftrightarrow e^x\leq e^{\ln 2e}\Leftrightarrow x\leq\ln 2e$$

Όμως x > 1 δηλαδή $1 < x \le \ln 2e$.

Δ4. $e^{f(x)} \ge g(x) + \frac{6-4e}{e} \Leftrightarrow \frac{e^{2x}-(e+1)e^x+e}{e^{x+1}-e} \ge \frac{e^{2x}-4e^x+3e}{e} + \frac{6-4e}{e} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{e^x-e}{e} \ge \frac{e^{2x}-4e^x+3e}{e} + \frac{6-4e}{e} \Leftrightarrow e^x - e \ge e^{2x} - 4e^x + 3e + 6 - 4e \Leftrightarrow e^{2x} - 5e^x + 6 \le 0 \Leftrightarrow$

$\omega^2 - 5\omega + 6 \le 0$ όπου $\omega = e^x > 0$

Είναι $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$.

Οπότε $\omega = \frac{5 \pm 1}{2} \begin{matrix} \nearrow 3 \\ \searrow 2 \end{matrix}$

Το πρόσημο φαίνεται στο παρακάτω πίνακα:

ω		2		3	
$\omega^2-5\omega+6$	+	0	-	0	+

Άρα $2 \le \omega \le 3 \Leftrightarrow 2 \le e^x \le 3 \Leftrightarrow \ln 2 \le x \le \ln 3$.

Όμως $x > 1$ και $\ln 2 < \ln e = 1$ οπότε επαληθεύεται μόνο για $1 < x \le \ln 3$.