

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2015
Β' ΦΑΣΗ

E_3.BMλ3Γ(α)

ΤΑΞΗ: Γ' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ
ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Μ. Τετάρτη 8 Απριλίου 2015

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

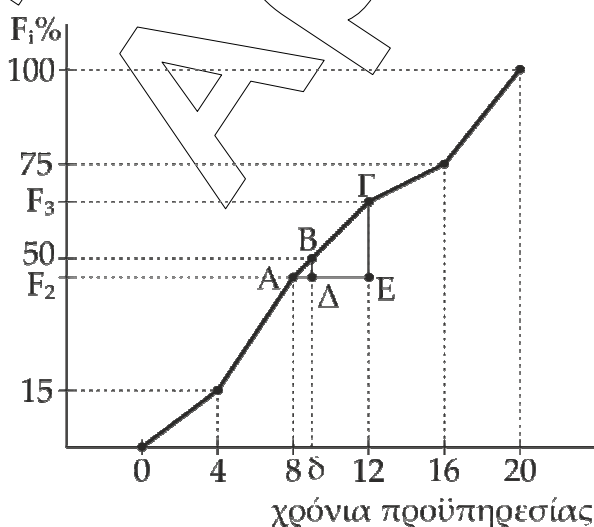
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Σχολικό σελ. 65
- A2.** Σχολικό σελ. 148
- A3.** Σχολικό σελ. 66
- A4.**
 - α. Λάθος
 - β. Λάθος
 - γ. Σωστό
 - δ. Λάθος
 - ε. Λάθος

ΘΕΜΑ Β

B1. Σύμφωνα με το σχήμα



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2015
Β' ΦΑΣΗ

E_3.BMλ3Γ(α)

τα τρίγωνα $ΑΒΔ$ και $ΑΓΕ$ είναι όμοια γιατί είναι ορθογώνια και έχουν την γωνία \hat{A} κοινή. Επομένως, οι πλευρές τους είναι ανάλογες. Δηλαδή,

$$\frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{ΑΔ}{ΑΕ} = \frac{ΒΔ}{ΓΕ}$$

Επομένως,

$$\frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{ΑΔ}{ΑΕ} \Leftrightarrow \frac{1}{4} = \frac{\delta - 8}{12 - 8} \Leftrightarrow \frac{1}{4} = \frac{\delta - 8}{4} \Leftrightarrow \delta - 8 = 1 \Leftrightarrow \delta = 9$$

1ος τρόπος:

Από το παραπάνω πολύγωνο αφαιρετικών σχετικών συχνοτήτων επι τοις εκατό έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} f_1\% &= 15 \\ f_2\% &= F_2\% - 15 \\ f_3\% &= F_3\% - F_2\% \\ f_4\% &= 75 - F_3\% \\ f_5\% &= 100 - 75 = 25 \end{aligned}$$

Όμως,

$$\begin{aligned} f_2\% &= 3f_4\% \Leftrightarrow F_2\% - 15 = 3(75 - F_3\%) \\ \Leftrightarrow F_2\% - 15 &= 225 - 3F_3\% \\ \Leftrightarrow F_2\% &= 240 - 3F_3\% \quad (1) \end{aligned}$$

Επίσης, ισχύει

$$\begin{aligned} \frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{ΒΔ}{ΓΕ} &\Leftrightarrow \frac{1}{4} = \frac{50 - F_2\%}{F_3\% - F_2\%} \Leftrightarrow \\ &\stackrel{(1)}{F_3\% - F_2\% = 200 - 4F_2\%} \Leftrightarrow \\ F_3\% - 240 + 3F_3\% &= 200 - 4(240 - 3F_3\%) \Leftrightarrow \\ 4F_3\% - 240 &= 200 - 960 + 12F_3\% \Leftrightarrow \\ -8F_3\% &= 440 - 960 \Leftrightarrow \\ -8F_3\% &= -520 \Leftrightarrow F_3\% = 65 \end{aligned}$$

Οπότε, από την σχέση (1) έχουμε ότι,

$$F_2\% = 240 - 3 \cdot 65 = 240 - 195 \Leftrightarrow F_2\% = 45$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2015
Β' ΦΑΣΗ

E_3.BMλ3Γ(α)

Άρα, οι σχετικές συχνότητες επί τοις εκατό είναι:

$$\begin{aligned} f_1\% &= 15 \\ f_2\% &= 30 \\ f_3\% &= 20 \\ f_4\% &= 10 \\ f_5\% &= 100 - 75 = 25 \end{aligned}$$

2ος τρόπος:

Από το παραπάνω πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό παρατηρούμε ότι: $f_1\% = 15$ και $f_5\% = 25$.

Γνωρίζουμε ότι η διάμεσος είναι η τιμή για την οποία το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες από αυτήν και το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες από αυτήν. Δηλαδή, ισχύει ότι:

$$\begin{cases} f_1\% + f_2\% + \frac{1}{4}f_3\% = 50 \\ \frac{3}{4}f_3\% + f_4\% + f_5\% = 50 \end{cases} \quad \begin{matrix} f_2\% = 3f_4\% \\ \Leftrightarrow \end{matrix} \quad \begin{cases} 15 + 3f_4\% + \frac{1}{4}f_3\% = 50 \\ \frac{3}{4}f_3\% + f_4\% + 25 = 50 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3f_4\% + \frac{1}{4}f_3\% = 35 \\ f_4\% + \frac{3}{4}f_3\% = 25 \end{cases}$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα προκύπτει ότι $f_3\% = 20$ και $f_4\% = 10$.

Οπότε, $f_2\% = 30$.

Οι κεντρικές τιμές των κλάσεων είναι

$$x_1 = 2, x_2 = 6, x_3 = 10, x_4 = 14, x_5 = 18$$

Συνεπώς,

Χρόνια προϋπηρεσίας	x_i	f_i	F_i
0 – 4	2	0,15	0,15
4 – 8	6	0,30	0,45
8 – 12	10	0,20	0,65
12 – 16	14	0,10	0,75
16 – 20	18	0,25	1
Σύνολο		1	

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2015
Β' ΦΑΣΗ

E_3.BMλ3Γ(α)

B2. Η μέση τιμή ισούται:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{v} \sum_{i=1}^5 x_i v_i = \sum_{i=1}^5 x_i \frac{v_i}{v} = \sum_{i=1}^5 x_i f_i = x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + x_4 f_4 + x_5 f_5 \\ &= 2 \cdot 0,15 + 6 \cdot 0,3 + 10 \cdot 0,2 + 14 \cdot 0,1 + 18 \cdot 0,25 \\ &= 0,3 + 1,8 + 2 + 1,4 + 4,5 = 10 \end{aligned}$$

Για την διακύμανση ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{v} \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 v_i = \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 \frac{v_i}{v} = \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 f_i \\ &= (2-10)^2 \cdot 0,15 + (6-10)^2 \cdot 0,3 + (10-10)^2 \cdot 0,2 + (14-10)^2 \cdot 0,1 + (18-10)^2 \cdot 0,25 \\ &= 64 \cdot 0,15 + 16 \cdot 0,3 + 16 \cdot 0,1 + 64 \cdot 0,25 \\ &= 64(0,15 + 0,25) + 16(0,3 + 0,1) \\ &= 64 \cdot 0,4 + 16 \cdot 0,4 \\ &= 80 \cdot 0,4 = 32 \end{aligned}$$

B3. Αντικαθιστώντας στον τύπο

$$s^2 = \frac{1}{v} \left\{ \sum_{i=1}^k x_i^2 v_i - \frac{1}{v} \left(\sum_{i=1}^k x_i v_i \right)^2 \right\}$$

έχουμε ότι,

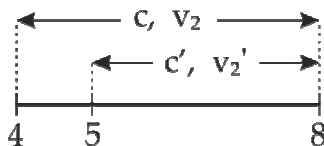
$$32 = \frac{1}{v} \left[5280 - \frac{1}{v} \cdot (v \cdot \bar{x})^2 \right] \Leftrightarrow 32v = 5280 - 100v \Leftrightarrow 132v = 5280 \Leftrightarrow v = 40$$

Οι υπάλληλοι που έχουν τουλάχιστον 5 χρόνια προϋπηρεσίας είναι

$$v_2' + v_3 + v_4 + v_5$$

όπου v_2' είναι το πλήθος των υπαλλήλων που έχουν από 5-8 χρόνια.

Επειδή οι παρατηρήσεις είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες, τότε:



$$\frac{c'}{c} = \frac{v_2'}{v_2} \Leftrightarrow \frac{8-5}{8-4} = \frac{v_2'}{v_2} \Leftrightarrow \frac{3}{4} = \frac{v_2'}{40 \cdot 0,3} \Leftrightarrow \frac{3}{4} = \frac{v_2'}{12} \Leftrightarrow v_2' = 9$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2015
Β' ΦΑΣΗ

E_3.BMλ3Γ(α)

Επίσης,

$$\begin{aligned} v_3 &= v \cdot f_3 = 40 \cdot 0,2 = 8 \\ v_4 &= v \cdot f_4 = 40 \cdot 0,1 = 4 \\ v_5 &= v \cdot f_5 = 40 \cdot 0,25 = 10 \end{aligned}$$

Οπότε, $v_2 + v_3 + v_4 + v_5 = 9 + 8 + 4 + 10 = 31$.

Άρα, 31 υπάλληλοι έχουν τουλάχιστον 5 χρόνια προϋπηρεσία.

B4. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} v_1 &= v \cdot f_1 = 40 \cdot 0,15 = 6 \\ v_2 &= v \cdot f_2 = 40 \cdot 0,30 = 12 \end{aligned}$$

Εφόσον, το επίδομα για κάθε υπάλληλο δίνεται από την σχέση

$$y_i = 3x_i + 2i, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5$$

τότε το συνολικό κόστος αυτής της απόφασης θα είναι

$$\begin{aligned} & y_1 v_1 + y_2 v_2 + y_3 v_3 + y_4 v_4 + y_5 v_5 = \\ & = (3x_1 + 2)v_1 + (3x_2 + 4)v_2 + (3x_3 + 6)v_3 + (3x_4 + 8)v_4 + (3x_5 + 10)v_5 \\ & = 8 \cdot 6 + 22 \cdot 12 + 36 \cdot 8 + 50 \cdot 4 + 64 \cdot 10 = 1440 \text{ ευρώ} \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι $f(x) = x^2 - (P(A') + P(B'))x, x \in \mathbb{R}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f'(x) = 2x - P(A') - P(B')$.

Η εφαπτομένη της στο $M(1, f(1))$ έχει εξίσωση της μορφής:

$$y = \lambda x + \beta, \text{ με } \lambda = f'(1) = 2 - P(A') - P(B')$$

Άρα $\varepsilon: y = [2 - P(A') - P(B')]x + \beta$.

Αφού $M(1, f(1))$ είναι σημείο της ε και $f(1) = 1 - P(A') - P(B')$,

έχουμε:

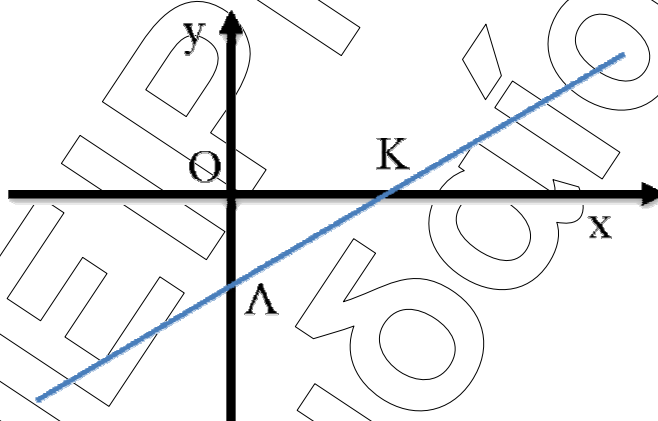
$$1 - P(A') - P(B') = 2 - P(A') - P(B') + \beta \Leftrightarrow \beta = -1$$

$$\text{Επομένως } \varepsilon: y = [2 - P(A') - P(B')]x - 1 \quad (1).$$

Όμως $P(A) = 1 - P(A')$ και $P(B) = 1 - P(B')$, οπότε προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε $2 - P(A') - P(B') = P(A) + P(B)$ οπότε η (1) γράφεται

$$\varepsilon: y = [P(A) + P(B)]x - 1$$

Γ2. Για $x = 0$ είναι $y = [P(A) + P(B)] \cdot 0 - 1 = -1$, οπότε το σημείο τομής της ε και του $y'y$ είναι το $\Lambda(0, -1)$, έτσι $(O\Lambda) = |-1| = 1$.



$$\text{Επίσης για } y = 0 \text{ είναι } 0 = [P(A) + P(B)]x - 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{P(A) + P(B)} > 0,$$

διότι $A \neq \emptyset$ άρα $P(A) > 0$ και $P(B) \geq 0$, οπότε $P(A) + P(B) > 0$.

$$\text{Επομένως το σημείο τομής της } \varepsilon \text{ με τον } x'x \text{ είναι } \text{Κ}\left(\frac{1}{P(A) + P(B)}, 0\right),$$

$$\text{έτσι } (OK) = \frac{1}{P(A) + P(B)}.$$

Είναι

$$(OK\Lambda) = \frac{1}{2} \cdot (O\Lambda) \cdot (OK) \Leftrightarrow \frac{1}{2P(A \cup B)} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{P(A) + P(B)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B)$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = 0$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2015
Β΄ ΦΑΣΗ

E_3.BMλ3Γ(α)

Αφού τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα είναι

$$P(A \cap B) = \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} \Leftrightarrow N(A \cap B) = 0 \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$$

Οπότε τα A και B είναι **ασυμβίβαστα**.

Γ3. Τα A και B είναι ασυμβίβαστα, οπότε

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$x_3 = P(A \cap B) = 0$$

$$x_4 = P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = P(B)$$

$$x_5 = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = P(A)$$

$$x_6 = P(\Omega) = 1$$

$$x_7 = P(B)$$

- Αν $P(A) \leq P(B)$ έχουμε
 $0, 0, P(A), P(B), P(B), P(A) + P(B), 1$.
- Αν $P(A) > P(B)$ έχουμε
 $0, 0, P(B), P(B), P(A), P(A) + P(B), 1$.

Σε κάθε περίπτωση η διάμεσος θα ισούται με την 4^η παρατήρηση, οπότε

$$\delta = P(B) \Leftrightarrow P(B) = \frac{1}{3}$$

Όμως

$$\bar{x} = \frac{0 + 0 + P(A) + P(B) + P(B) + [P(A) + P(B)] + 1}{7} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{8}{21} = \frac{2P(A) + 3P(B) + 1}{7} \Leftrightarrow 56 = 21[2P(A) + 3 \cdot P(B) + 1] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 56 = 21 \left[2P(A) + 3 \cdot \frac{1}{3} + 1 \right] \Leftrightarrow 56 = 42P(A) + 42 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A) = \frac{14}{42} \Leftrightarrow P(A) = \frac{1}{3}$$

$$\text{Έτσι } P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Γ4. i. Είναι $\bar{x} = \frac{1}{7} \sum_{i=1}^7 x_i \Leftrightarrow \sum_{i=1}^7 x_i = 7\bar{x} = 7 \cdot \frac{8}{21} = \frac{8}{3}$, οπότε η νέα μέση τιμή είναι:

$$\bar{x}' = \frac{\sum_{i=1}^7 x_i + x_8}{8} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{\frac{8}{3} + \frac{1}{2} + P(\Gamma)}{8} \Leftrightarrow 4 = \frac{8}{3} + \frac{1}{2} + P(\Gamma)$$

$$\Leftrightarrow P(\Gamma) = \frac{24}{6} - \frac{16}{6} - \frac{3}{6} \Leftrightarrow P(\Gamma) = \frac{5}{6}$$

Έστω A και Γ ασυμβίβαστα. Τότε από τον απλό προσθετικό νόμο έχουμε:

$$P(A \cup \Gamma) = P(A) + P(\Gamma) = \frac{1}{3} + \frac{5}{6} = \frac{2}{6} + \frac{5}{6} = \frac{7}{6} > 1,$$

το οποίο είναι άτοπο, οπότε τα A και Γ δεν είναι ασυμβίβαστα.

ii. Είναι $A \cap \Gamma \subseteq A$ οπότε $P(A \cap \Gamma) \leq P(A) = \frac{1}{3}$.

Επίσης είναι:

$$P(A \cup \Gamma) = P(A) + P(\Gamma) - P(A \cap \Gamma) \Leftrightarrow P(A \cup \Gamma) = \frac{7}{6} - P(A \cap \Gamma)$$

Ισχύει ότι:

$$P(A \cup \Gamma) \leq 1 \Leftrightarrow \frac{7}{6} - P(A \cap \Gamma) \leq 1 \Leftrightarrow \frac{7}{6} - 1 \leq P(A \cap \Gamma) \Leftrightarrow \frac{1}{6} \leq P(A \cap \Gamma)$$

$$\text{Άρα } \frac{1}{6} \leq P(A \cup \Gamma) \leq \frac{1}{3}.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως πράξεις και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = \ln x - \ln(x+1),$$

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως σύνθεση και διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f''(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2015
Β' ΦΑΣΗ

E_3.BMλ3Γ(α)

Όμως $P(1) + P(2) + P(3) + \dots + P(9) = f''(1) + f''(2) + f''(3) + \dots + f''(9)$
 $= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$

Οπότε $P(0) + P(1) + P(2) + \dots + P(9) = 1 \Leftrightarrow CV + \frac{9}{10} = 1 \Leftrightarrow CV = \frac{1}{10}$.

Άρα $CV = 10\%$.

Δ2. $\sum_{i=1}^v t_i^2 = (\bar{x}^2 - \bar{x} + 11) \cdot v \Leftrightarrow \frac{1}{v} \sum_{i=1}^v t_i^2 - \bar{x}^2 = -\bar{x} + 11 \quad (1)$

Όμως $s^2 = \frac{1}{v} \left[\sum_{i=1}^k t_i^2 - \frac{1}{v} \left(\sum_{i=1}^k t_i \right)^2 \right] \Leftrightarrow s^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^k t_i^2 - \left(\frac{1}{v} \sum_{i=1}^k t_i \right)^2 \Leftrightarrow s^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^k t_i^2 - \bar{x}^2$

$CV = \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow x = 10s$.

Οπότε (1) $\Leftrightarrow s^2 + \bar{x} - 11 = 0$

Άρα $s^2 + \bar{x} - 11 = 0 \Leftrightarrow s^2 + 10s - 11 = 0 \Leftrightarrow s = 1$ ή $s = -11$ απορ.

Για $s = 1$ έχουμε $\bar{x} = 10$.

Δ3. Αν y_1, y_2, \dots, y_v οι νέες παρατηρήσεις τότε $y_i = x_i - 2, i = 1, 2, \dots, v$.

Αν \bar{y} και s' , η νέα μέση τιμή και τυπική απόκλιση αντίστοιχα, τότε από γνωστή εφαρμογή του σχολικού βιβλίου είναι $\bar{y} = \bar{x} - 2 = 8$ και

$s' = s = 1$. Άρα $CV' = \frac{s'}{|\bar{y}|} = \frac{1}{8}$ και το ποσοστό μεταβολής του

συντελεστή μεταβλητότητας είναι $\frac{CV' - CV}{CV} \cdot 100\% = 25\%$

Δ4. $s^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^v (t_i - \bar{x})^2 \Leftrightarrow 1^2 = \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} (t_i - 10)^2 \Leftrightarrow$

$(t_1 - 10)^2 + (t_2 - 10)^2 + \dots + (t_{16} - 10)^2 = 16$

Επομένως για κάθε $i = 1, 2, \dots, 16$ ισχύει:

$(t_i - 10)^2 \leq 16 \Leftrightarrow |t_i - 10| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq t_i - 10 \leq 4 \Leftrightarrow 6 \leq t_i \leq 14$

$\bar{x} = \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} t_i \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{16} t_i = 16 \cdot 10 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{16} t_i = 160$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2015
Β' ΦΑΣΗ

E_3.BMλ3Γ(α)

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{15} \sum_{i=1}^{15} t_i = \frac{1}{15} (\sum_{i=1}^{16} t_i - t_{16}) = \frac{1}{15} (160 - t_{16})$$

$$\text{Άρα } 9 = \frac{1}{15} (160 - t_{16}) \Leftrightarrow 15 \cdot 9 = 160 - t_{16} \Leftrightarrow t_{16} = 25.$$

Όμως ισχύει $6 \leq t_i \leq 14$ άρα καμία από τις παρατηρήσεις δεν μπορεί να είναι 25.

ΣΥΝΕΙΡΜΟ
ΑΡΙΘΜΩ