

**ΤΑΞΗ:** 3<sup>η</sup> ΤΑΞΗ ΕΠΑ.Λ. (Α΄ ΟΜΑΔΑ)

**ΜΑΘΗΜΑ:** ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι/ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

**Ημερομηνία:** Κυριακή 27 Απριλίου 2014

**Διάρκεια Εξέτασης:** 3 ώρες

### ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

#### ΘΕΜΑ Α

**A1.** Έστω συνεχής συνάρτηση  $f: [α, β] \rightarrow \mathbb{R}$  με παράγουσα συνάρτηση  $F$ . Τη σταθερή διαφορά  $F(β) - F(α)$  ονομάζουμε ορισμένο ολοκλήρωμα της συνάρτησης  $f$  από το  $α$  έως το  $β$  και το συμβολίζουμε με:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = [F(x)]_{\alpha}^{\beta} = F(\beta) - F(\alpha).$$

**A2.** 1  $\rightarrow$  Λ, 2  $\rightarrow$  Σ, 3  $\rightarrow$  Λ, 4  $\rightarrow$  Λ, 5  $\rightarrow$  Σ.

**A3. 1.** Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ , και  $\nu =$  ακέραιος, τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^{\nu} = \ell^{\nu}$ .

**2.**  $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ .

**3.**  $c =$  πραγματικός αριθμός,  $\int_{\alpha}^{\beta} c dx = c(\beta - \alpha)$ .

**4.** Αν σε ένα διάστημα  $(\alpha, \beta)$  που περιέχει ένα  $x_0$ , και ισχύει  $f(x) \geq f(x_0)$ , τότε η  $f$  έχει στο  $x_0$  τοπικό ελάχιστο.

**5.** Η παράγουσα της  $\frac{g'(x)}{g(x)}$ , όπου  $g(x) > 0$ , είναι η  $\ln[g(x)] + c$ .

ΘΕΜΑ Β

Αριθμός βιβλίων $x_i$	Συχνότητα $v_i$	Σχετική συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική σχετική συχνότητα $F_i\%$	Αθροιστική συχνότητα $N_i$	$x_i \cdot v_i$	$(\bar{x} - x_i)^2$	$v_i (\bar{x} - x_i)^2$
0	5	10	10	5	0	25	125
2	10	20	30	15	20	9	90
4	5	10	40	20	20	1	5
6	15	30	70	35	90	1	15
8	15	30	100	50	120	9	135
<b>ΣΥΝΟΛΑ</b>	50	100			250		370

**B1.**  $f_5\% = F_5\% - F_4\% = 100\% - 70\% = 30\%$

$$v = \frac{v_5}{f_5} = \frac{15}{0,3} = \frac{150}{3} = 50$$

$$f_1 = \frac{v_1}{v} = \frac{5}{50} = \frac{10}{100} = 0,1 \text{ ή } 10\%$$

$$v_2 = f_2 \cdot v = 0,20 \cdot 50 = 10$$

$$v_3 = \frac{x_3 \cdot v_3}{x_3} = \frac{20}{4} = 5$$

$$f_3 = \frac{v_3}{v} = \frac{5}{50} = 0,1 \text{ ή } 10\%$$

$$N_4 = N_5 - v_5 = 50 - 15 = 35$$

$$v_4 = N_4 - N_3 = 35 - 20 = 15$$

$$f_4 = \frac{v_4}{v} = \frac{15}{50} = \frac{30}{100} = 0,3$$

**B2.**  $\bar{x} = \frac{250}{50} = 5.$

**B3.** Το πλήθος είναι 50 (άρτιος). Άρα υπάρχουν 2 μεσαίες παρατηρήσεις ( $25^{\text{η}}$  και  $26^{\text{η}}$ ). Από τη στήλη της αθροιστικής συχνότητας αυτές αντιστοιχούν στην τιμή μεταβλητής  $x_4$ . Άρα  $\delta = \frac{6+6}{2} = 6.$

**B4.**  $s^2 = \frac{370}{50} = \frac{740}{100} = 7,4.$

B5.  $\frac{1}{x'} = \frac{250 + 50 \cdot 2}{50} = \frac{350}{50} = 7.$

**ΘΕΜΑ Γ**

Γ1. Από τους περιορισμούς των κλάδων της συνάρτησης  $x \in (0, +\infty).$

Γ2.  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-x^2 + 6x - 8}{2 - \sqrt{x+2}} = \dots = \frac{0}{0}$  (Απροσδιόριστη Μορφή)

$-x^2 + 6x - 8 = -(x-2)(x-4)$ , αφού η εξίσωση  $-x^2 + 6x - 8 = 0$  έχει ρίζες τις  $x_1=2$  και  $x_2=4$ .

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-x^2 + 6x - 8}{2 - \sqrt{x+2}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-(x-2)(x-4)(2 + \sqrt{x+2})}{(2 - \sqrt{x+2})(2 + \sqrt{x+2})} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-(x-2)(x-4)(2 + \sqrt{x+2})}{4 - (x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-(x-2)(x-4)(2 + \sqrt{x+2})}{4 - x - 2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-(x-2)(x-4)(2 + \sqrt{x+2})}{2 - x} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-(x-2)(x-4)(2 + \sqrt{x+2})}{-(x-2)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} [(x-4)(2 + \sqrt{x+2})] = (2-4)(2 + \sqrt{4}) = (-2) \cdot 4 = -8$$

Γ3.  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left[ \lambda \cdot \frac{x^2 + 4}{x+2} \cdot e^{x-2} \right] = \lambda \cdot \frac{2^2 + 4}{2+2} \cdot e^0 = 2\lambda.$

Γ4. Για να υπάρχει το όριο στο  $x = 2$  θα πρέπει να ισχύει:  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x).$

Συνεπώς θα έχουμε  $2\lambda = -8 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-8}{2} \Leftrightarrow \lambda = -4$

Γ5. Για να είναι συνεχής η συνάρτηση στο  $x=2$  θα πρέπει να ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2).$$

$$f(2) = \kappa^3$$

Άρα  $\kappa^3 = -8 \Leftrightarrow \kappa = \sqrt[3]{-8} \Leftrightarrow \kappa = -2$

**ΘΕΜΑ Δ**

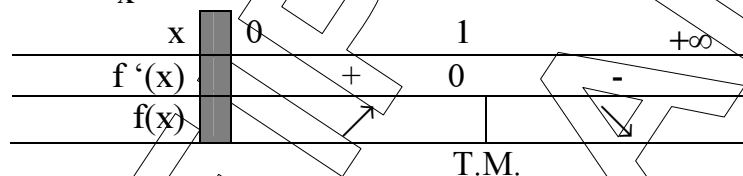
Δ1. Από θεώρημα Fermat έχουμε ότι  $f'(1) = 0$

$$f'(x) = \frac{(\alpha + \ln x)' \cdot x^2 - (\alpha + \ln x) \cdot (x)'}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - (\alpha + \ln x) \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \alpha - \ln x}{x^2}$$

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 1 - \alpha - \ln 1 = 0 \Leftrightarrow 1 - \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$$

Δ2.  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - 1 - \ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{-\ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = \ln 1 \Leftrightarrow x = 1$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{-\ln x}{x^2} > 0 \Leftrightarrow -\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x < \ln 1 \Leftrightarrow x < 1$$



Η  $f \uparrow$  στο  $(0, 1]$  και η  $f \downarrow$  στο  $[1, +\infty)$

Δ3. Η  $f$  παρουσιάζει στο  $x = 1$  Τ.Μ. (που είναι και Ολικό). Άρα από τον ορισμό του Τοπικού Μεγίστου ισχύει:  $f(x) \leq f(1) \Leftrightarrow f(x) \leq \frac{1 + \ln 1}{1} \Leftrightarrow f(x) \leq 1$ .

Δ4.  $E = \int_1^e |g(x)| dx$

$$g(x) = x \cdot f(x) - 1 \Leftrightarrow g(x) = x \cdot \frac{1 + \ln x}{x} - 1 \Leftrightarrow g(x) = 1 + \ln x - 1 \Leftrightarrow g(x) = \ln x$$

$$g(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1. \text{ Άρα στο } [1, e] \text{ η } g(x) > 0.$$

$$E = \int_1^e |g(x)| dx = \int_1^e \ln x dx = \int_1^e 1 \cdot \ln x dx = \int_1^e (x)' \cdot \ln x dx =$$

$$= [x \cdot \ln x]_1^e - \int_1^e x \cdot (\ln x)' dx = e \cdot \ln e - 1 \cdot \ln 1 - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$= e \cdot 1 - 1 \cdot 0 - \int_1^e 1 dx = e - (e - 1) = e - e + 1 = 1 \text{ τ.μ.}$$